124

I denne oppgaven har vi oppgitt vektoren u. Finn to andre vektorer v og w slik at de tre vektorene til sammen gir en basis for $\mathbb{R}^3$.

Svar

Jeg gjør oppgave a) ettersom prosessen er tilsvarende for b) og c).

Vi har fått oppgitt vektoren $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Her velger vi en vektor v slik at $u \cdot v = 0$, en slik vektor er $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(kunne også ha valgt $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, det er altså ikke kun en løsning)

For å finne w bestemmer vi at $w = u \times v$ for da er $u \times w = v \times w = 0$.

$$w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} k = 2k = (0, 0, 2)$$

En annen løsning ville ha vært å følge $\boxed{\text{lemma } 5.1.2}$.

Da ville vi fått:

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

som er ganske likt det vi fant i sted.

126

La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

og

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Regn ut trippelproduktet

$$[Au, Av, Aw]$$

Svar

Her ønsker vi å bruke prop. 5.1.8. Resultatet sier at vi ikke må utføre de tre multiplikasjonene Au, Av og Aw.

Resultatet sier at

$[Au, Av, Aw] = \det(A) \cdot [u, v, w]$,

noe som betyr at vi kun trenger å regne ut 2 determinanter

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \dots = -2$$

$$[u, v, w] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 2$$

Dette betyr:

$$[Au, Av, Aw] = \det(A) \cdot [u, v, w] = -2 \cdot 2 = \underline{\underline{-4}}$$

128

Vi har gitt en ortogonal matrise med $\det(A) = 1$.

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Finn en vektor v slik at $Av = v$.

Svar

Starter med å endre på likningen

$$Av = v$$

$$Av = I_3 v$$

$$Av - I_3 v = \vec{0}$$

$$(A - I_3)v = \vec{0}$$

$$\sqrt{6}(A - I_3)v = \sqrt{6}\vec{0}$$

$$(\sqrt{6}A - \sqrt{6}I_3)v = \vec{0}$$

$$\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 2\\ -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1\\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\sqrt{6} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{6} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{6}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Dette gir oss likningene

I $\quad (\sqrt{2}-\sqrt{6})x + 2z = 0$

II $\quad -\sqrt{2}x - (\sqrt{3}+\sqrt{6})y + z = 0$

III $\quad \sqrt{2}x - \sqrt{3}y - (1+\sqrt{6})z = 0$

Fra likning I får vi at

$z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}x$, og setter dette inn i likning II og III:

II $\quad -\sqrt{2}x - (\sqrt{3}+\sqrt{6})y + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}x = 0$

$$y = \frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{2(\sqrt{6}+\sqrt{3})}x = \left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\right)x$$

III $\quad \sqrt{2}x - \sqrt{3}y - \frac{1}{2}(1+\sqrt{6})(\sqrt{6}-\sqrt{2})x = 0$

$$y = \left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{3}\right)x$$

Nå ser vi at II = III og kan se bort fra likning III. Dette gir oss at

$$z = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}x \quad \text{og} \quad y = \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}\right)x$$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)x$$

Dermed blir

$$v = \begin{pmatrix} x \\ \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)x \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}x \end{pmatrix}$$

og hvis vi velger

$x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ får vi at

$$v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ \left(1-\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{3}\right) \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

129

Vi har gitt en ortogonal matrise med det$(A) = -1$.

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Finn en vektor v slik at $Av = -v$

Svar

Igjen vi endrer på likningen og får:

$$(\sqrt{5}A + \sqrt{5}I_3)v = \vec{0}.$$

Med tilsvarende utregninger fra oppg. 128) får vi at

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$ og velger $z = 1$ og får

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

139

Regn ut Housholder-matrisen til den oppgitte vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Svar

Vi finner Housholder-matrisen til a) siden utregningen er lik for b) og c).

Housholder-matrisen til en vektor v er

$$Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}.$$

$$vv^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$v^Tv = (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$Q_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

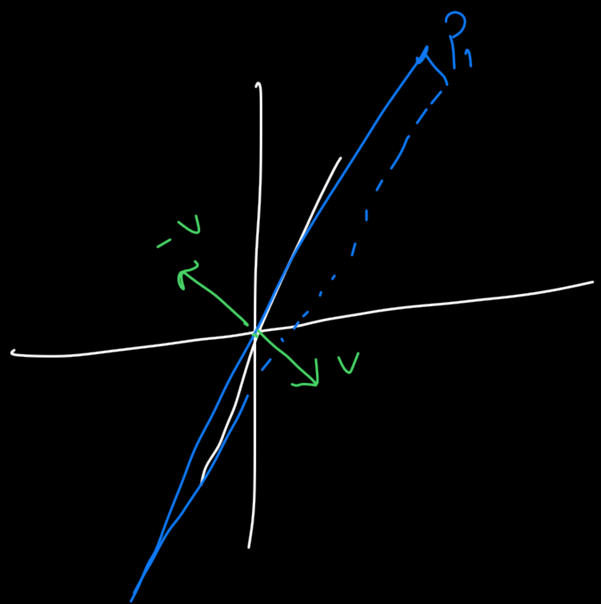
$$Q_v = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

133

Vi har gitt to refleksjoner. Den ene tar $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ på $-v$, den andre tar $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ på $-w$. Finn skjæringslinja mellom de to refleksjonene.

Svar

La oss kalle planet som tar v til $-v$ for P_1. Sett fra siden ser det ut som



Forhåpentligvis er tegningen min fin nok til å se at v er en normalvektor for P_1 Planet, og at planet går igjennom origo. Dermed er likningen til P_1 gitt ved:

$$1\cdot(x-0)-2\cdot(y-0)-2\cdot(z-0)=0$$

$$P_1: \quad x-2y-2z=0$$

Hvis vi kaller planet som tar w til $-w$ for P_2 får vi med lignende utregning at

$$P_2: \quad y-z=0$$

Skjæringslinja vil der de to planene er lik hverandre. Fra P_2 ser vi at $y=z$ og setter vi dette inn i P_1 får vi:

$$x-2y-2y=0,$$

$$x - 4y = 0,$$

$$x = 4y.$$

Dette betyr at skjæringslinjen er gitt ved

$$l = \left\{ \begin{pmatrix} 4y \\ y \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; y \in \mathbb{R} \right\}$$

Dette betyr retningsvektoren til l er $v_l = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

134

La A være matrisen gitt ved

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finn fikspunktene til matrisen og bestem hva slags isometri den representerer.

Svar

Fikspunktene til A er gitt ved

$Av = v$ og denne likningen kan skrives om til $(A - I_3)v = \vec{0}$.

Med lignende utregninger som fra oppgave 128 får vi at

$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hvis vi nå ser på prop 5.38, ser vi at A er en sammensetting av en refleksjon og en rotasjon.