149

Har ett indreprodukt på $\mathcal{P}_2$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$$

a) Vis at dette er ett indreprodukt.

Svar:

Må vise at indreproduktet oppfyller de tre kravene i $\boxed{\text{def. 6.1.1}}$

$\boxed{\text{i)}}$ $\langle f(x), ag(x) + bh(x) \rangle$

$$= f(-1)\cdot(a\cdot g(-1) + b\cdot h(-1)) + f(0)\cdot(ag(0) + bh(0)) + f(1)(ag(1) + bh(1))$$

$$= a(f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)) + b(f(-1)h(-1) + f(0)h(0) + f(1)h(1))$$

$$= a\langle f(x), g(x) \rangle + b\langle f(x), h(x) \rangle$$

$\boxed{\text{ii)}}$ $\langle f(x), g(x) \rangle = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)$

$$= g(-1)f(-1) + g(0)f(0) + g(1)f(1)$$

$$= \langle g(x), f(x) \rangle$$

$\boxed{iii)}$

$$\langle f(x), f(x) \rangle = f(-1)^2 + f(0)^2 + f(1)^2$$

dette vil alltid være større eller lik 0 siden $f(-1), f(0), f(1) \geq 0$

Hvis $f(-1)^2 + f(0)^2 + f(1)^2 = 0$

$\Downarrow$

$f(-1) = f(0) = f(1) = 0$, siden den eneste måten summen av tre ikke negative tall er lik 0 er hvis alle tre tallene er 0. La $f(x)$ være et annengradspolynom $a + bx + cx^2$

da vil

$$f(-1) = a - b + c = 0$$
$$f(0) = a \qquad\quad = 0$$
$$f(1) = a + b + c = 0$$

Har at $b = c$ og $b = -c$ dermed er $b = 0$ og følgelig $c = 0$.

Dette betyr at $\langle f(x), f(x) \rangle \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $f(x) = 0$.

b) Finn en ortonormal basis til $\mathcal{P}_2$ relativ til indreproduktet i a).

Svar:

(NB: en ortonormal basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ er slik at $\|v_i\| = 1$ og $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i=j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$)

Her er det ikke en fremgangsmåte, man må gjette og sjekke litt.

Starter med polynomet $f(x) = 1$

$\langle 1, 1 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$

For at dette polynomet skal ha lengde 1 må vi dele på $\sqrt{3}$ ($\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$)

dermed er $p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Neste gjett er $f(x) = x$, da får vi at

$\langle f, f \rangle = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$

dermed må vi ha at $p_2(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$, og sjekker at p_2 står normalt på p_1: $\langle p_1, p_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.$

Så bra så langt, vi har at

$\|P_1\| = \|P_2\| = 1$ og at $\langle P_1, P_2 \rangle = 0$.

Nå er det fristende å teste med

$f(x) = x^2$ men dette funker ikke

(Sjekk selv og se hva som går feil)

Her er det gunstigere med

$f(x) = a + bx + cx^2$, la oss finne ut

hva a, b og c må være

$$\langle P_1, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(a-b+c) + \frac{1}{\sqrt{3}}a + \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)$$

$$\langle P_2, f \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a-b+c) + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b+c)$$

Vi ønsker at f skal være normal på både P_1 og P_2 og setter dermed likningene lik 0, og får

$$\text{I} \quad (a-b+c) + a + (a+b+c) = 0$$

$$\text{II} \quad -(a-b+c) + (a+b+c) = 0$$

(ganget bort $\frac{1}{\sqrt{3}}$ og $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

dette gir oss

$$\text{I} \quad 3a + 2c = 0$$

$$\text{II} \quad 2b = 0$$

Dette betyr at vi kan velge

$a=2$, $b=0$, $c=-3$ (her er det uendelig mange valg for a og c så lenge $3a+2c=0$).

Da er $f(x) = 2 - 3x^2$, så til slutt må vi dele på lengde og lengden til f er

$$\langle f, f\rangle = (-1)^2 + 2^2 + (-1)^2 = 6$$

da setter vi $P_3(x) = \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{3x^2}{\sqrt{6}}$.

Polynomene er da

$$P_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$P_2(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$P_3(x) = \frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{3x^2}{\sqrt{6}}$$

152)

For å vise at $\langle u, v\rangle = Au \cdot Av$ er et indreprodukt må vi sjekke $\boxed{\text{def } 6.1.1}$, igjen:

$\boxed{\text{i)}}$ $\langle u, av + bw\rangle = Au \cdot A(av + bw)$

$= Au \cdot A(av) + Au \cdot A(bw)$ $\left\{ \text{fra vanlig prikkprodukt} \right.$

$= a\, Au \cdot Av + b \cdot Au \cdot Aw$

$= a\langle u, v\rangle + b\langle u, w\rangle$

Fra vanlig prikkprodukt

$\boxed{\text{ii)}}$ $\langle u, v\rangle = Au \cdot Av = Av \cdot Au = \langle v, u\rangle$

$\boxed{\text{iii)}}$ $\langle u, u\rangle = Au \cdot Au \geq 0 \leftarrow$ $\boxed{\text{fra vanlig prikkprodukt}}$

Og nå har vi bruk for at A er invertibel

Siden $Au \cdot Au = 0 \iff Au = \vec{0}$

Siden A er invertibel så er $u = \vec{0}$.

Der med har vi $\langle u, u\rangle \geq 0$ med likhet hvis og bare hvis $u = \vec{0}$.

155)

a) Forklar hvorfor A er ortonormal.

Svar

(side 57)

A er ortonormal siden

$\|\vec{s}_i\| = 1$ og $s_i \cdot s_j = \begin{cases} 1 & \text{hvis } i=j \\ 0 & \text{hvis } i \neq j \end{cases}$

der $s_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $s_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $s_3 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Finn en egenvektor med egenverdi -1

Svar

$Av = -v \iff Av = -I_3 v \iff Av + I_3 v = \vec{0}$

$(A + I_3)v = \vec{0} \iff 5(A + I_3)v = \vec{0}$

$\iff (5A + 5I_3)v = \vec{0}$

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right)\vec{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 3 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\text{I} \quad 5x + 5z = 0 \\
&\text{II} \quad 3x + 9y = 0 \\
&\text{III} \quad 4x - 3y + 5z = 0
\end{aligned}$$

ser at $\text{II} = 3(\text{I} - \text{III})$, så vi kan fjerne II

$$\begin{aligned}
&\text{I} \quad 5x + 5z = 0 \iff z = -x \\
&\text{III} \quad 4x - 3y + 5z = 0
\end{aligned}$$

Sett I inn i III

$$\text{III} \quad 4x - 3y + 5(-x) = 0$$

$$4x - 3y - 5x = 0$$

$$-x - 3y = 0$$

$$x = -3y$$

$$z = 3y$$

dermed er $v = \begin{pmatrix} -3y \\ y \\ 3y \end{pmatrix}$ velg $y = 1$ $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) Finn fikspunktene til A og bestem hva slags isometri den er.

Svar

Fikspunktene til A er samme som egenvektor med egenverdi 1

$Av = v$ dette tilsvarer

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & -5x + 5z = 0 \\ \text{II} \quad & 3x - y = 0 \\ \text{III} \quad & 4x - 3y - 5z = 0 \end{aligned}$$

La $\text{III}' = \text{III} + \text{I}$

$$\text{III}' \quad -x - 3y = 0$$

Fra II og III

$$3x - y = 0$$
$$-x - 3y = 0$$

Dette gir $x = y = 0$

(siden $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\det \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = -10$)

Setter vi dette inn i I

I $5z = 0 \Rightarrow z = 0$

eneste fikspunkt $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fra punkt iv i $\boxed{\text{prop 5.3.8}}$

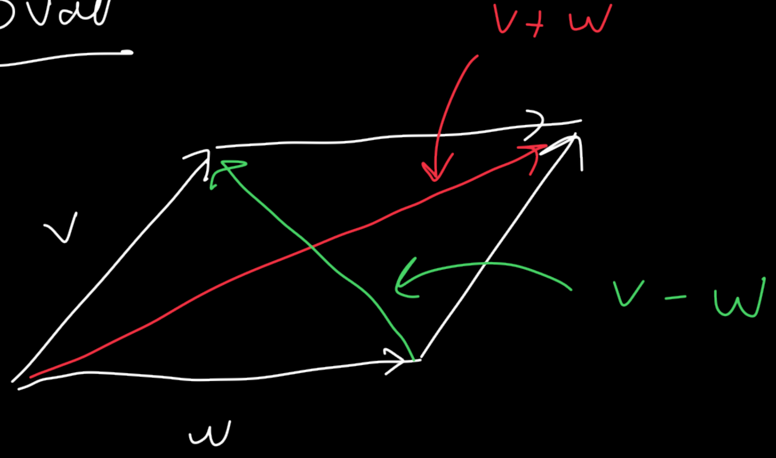
at A er en sammensetning

av en rotasjon og refleksjon.

15a

Et parallellogram er utspent av vektorene v og w. Vis at diagonalene står normalt på hverandre hvis og bare hvis $\|v\| = \|w\|$.

Svar



for at diagonalene skal være normale på hverandre må vi ha

$$\langle v+w, v-w \rangle = 0$$

regner ut indreproduktet

$$\langle v+w, v-w \rangle$$

$$= \langle v+w, v \rangle + \langle v+w, -w \rangle$$

$$= \langle v, v\rangle + \langle w, v\rangle + \langle v, -w\rangle + \langle w, -w\rangle$$

$$= \|v\|^2 + \langle v, w\rangle - \langle v, w\rangle - \langle w, w\rangle$$

$$= \|v\|^2 - \|w\|^2$$

Så hvis $\langle v+w, v-w\rangle = 0$

$\Rightarrow \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0 \Rightarrow \|v\| = \|w\|$.

Og hvis $\|v\| = \|w\|$ så vil

$\langle v+w, v-w\rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2 = 0$.

Dermed står diagonalene normalt på hverandre hvis og bare hvis $\|v\| = \|w\|$.

160) Et indreprodukt er gitt ved

$\langle v, w \rangle = v^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot w$, for

$v, w \in \mathbb{R}^3$. La $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Regn ut normene til v og w med dette indre produktet.

svar

Ved bruk av $\boxed{\text{def } 6.1.2}$ vet vi at $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

vi starter derfor med å regne ut $\langle v, v \rangle$ og $\langle w, w \rangle$.

$$\langle v, v \rangle = (1, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1, 1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3$$

dermed har vi $\|v\| = \sqrt{3}$.

Med liknende utregning får vi

$\|w\| = \sqrt{9} = 3$

b) Vis at v og w står normalt på hverandre med dette indre produktet.

Svar

Fra $\boxed{\text{def } 6.1.5}$ vet vi at v og w står normalt på hverandre kun når $\langle v, w \rangle = 0$

$$\langle v, w \rangle = (1,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (1,1,0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

Dermed står v og w normalt på hverandre.

c) Regn ut $\|v+w\|$ og vis at
$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

<u>svar</u>

$u = v + w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, regner ut $\langle u, u \rangle$

$$\langle u, u \rangle = (3, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (3, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 9 + 3 = 12$$

dermed er $\|u\| = \|v+w\| = \sqrt{12}$

$\|v+w\|^2 = (\sqrt{12})^2 = 12$

$\|v\|^2 = (\sqrt{3})^2 = 3$

$\|w\|^2 = (3)^2 = 9$

$\|v\|^2 + \|w\|^2 = 3 + 9 = 12 = \|v+w\|^2$

d) Forklar hvorfor vi kunne ha forutsagt likheten i c uten å regne ut $\|v+w\|$.

Svar

Vi kunne ha forutsagt likheten ved at vi visste at v og w står normalt på hverandre og $\boxed{\text{prop } 6.1.6}$.

165) Et indreprodukt på vektorrommet utspent av e^x og e^{-x} er gitt ved

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx$$

a) Regn ut normene til e^x og e^{-x} og indreproduktet $\langle e^x, e^{-x} \rangle$.

Svar

Starter med å regne ut:

$$\langle e^x, e^x \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^x \cdot e^x\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{4} \left(e^2 - e^{-2} \right).$$

$$\langle e^{-x}, e^{-x} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-2x}\, dx = \ldots = \frac{1}{4} \left(e^2 - e^{-2} \right)$$

$$\langle e^x, e^{-x} \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^x \cdot e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} dx = \ldots = 1$$

Dermed har vi:

$$\| e^x \| = \frac{1}{2} \sqrt{e^2 - e^{-2}}, \quad \| e^{-x} \| = \frac{1}{2} \sqrt{e^2 - e^{-2}}$$

$$\langle e^x, e^{-x} \rangle = 1$$

b) Vis at $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ og $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ står normalt på hverandre.

<u>Svar</u>

Da regner vi ut indreproduktet

$$\left\langle \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\langle e^x+e^{-x}, e^x-e^{-x} \rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt i) og ii)} \\ \text{def } 6.1.1 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle e^x, e^x\rangle + \langle e^x, e^{-x}\rangle - \langle e^x, e^{-x}\rangle - \langle e^{-x}, e^{-x}\rangle\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Punkt} \\ \text{i) og ii)} \\ \text{def } 6.1.1 \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle e^x, e^x\rangle - \langle e^{-x}, e^{-x}\rangle\right) = 0$$

vi vet at $\langle e^x, e^x\rangle = \langle e^{-x}, e^{-x}\rangle$ fra a)

dermed er

$$\left\langle \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \frac{1}{2}(e^x-e^{-x}) \right\rangle$$

c) Vis at

$$\left\|\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right\|^{2} = \frac{1}{4}\|e^{x}\|^{2} + \frac{1}{4}\|e^{-x}\|$$

i dette tilfellet

Svar

Vi vet hva høyre siden er

$$\frac{1}{4}\|e^{x}\|^{2} + \frac{1}{4}\|e^{-x}\|^{2} = \frac{1}{2}\|e^{x}\|^{2}$$

siden $\|e^{x}\| = \|e^{-x}\|$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(e^{2}-e^{-2}) = \frac{1}{8}\cdot(e^{2}-e^{-2})$$

Regner ut vestre siden

$$\left\|\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right\|^{2} = \left\langle \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}), \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})\right\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\langle e^{x}+e^{-x}, e^{x}+e^{-x}\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle e^{x},e^{x}\rangle + \langle e^{x},e^{-x}\rangle + \langle e^{x},e^{-x}\rangle + \langle e^{-x},e^{-x}\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(e^{2}-e^{-2}) + 1 + 1 + \frac{1}{4}(e^{2}-e^{2})\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{2} - e^{-2}\right) + \frac{1}{2}$$

Vent dette er ikke det samme som høgre siden, la oss regn ut indreproduktet direkte

$$\left\langle \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}), \frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x}) \right\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2} dx$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} e^{2x} + 2 + e^{-2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{2}e^{2} + 2 - \frac{1}{2}e^{-2}\right) - \left(\frac{1}{2}e^{-2} - 2 - \frac{1}{2}e^{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(e^{2} - e^{-2} + 4\right) = \frac{1}{8}\left(e^{2} - e^{-2}\right) + \frac{1}{2}.$$

Dette bekrefter det tidligere resultatet og dermed har vi ingen likhet, altså

$$\left\| \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \right\|^2 \neq \frac{1}{4}\|e^{x}\| + \frac{1}{4}\|e^{-x}\|.$$