Mer om vektorrom

Husk: Et vektorrom V er utspent av en delmengde $\mathcal{C}$ dersom

$$V = \left\{ a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \\ v_1, \ldots, v_n \in V \end{array} \right\}$$

Prop Hvis et vektorrom V er utspent av en endelig delmengde

$$\mathcal{C} = \{ v_1, \ldots, v_n \},$$

så vil et utvalg av elementer fra $\mathcal{C}$ danne en basis for V.

Eks: Hvis

$$v_1 = b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n, \quad b_i \in \mathbb{R},$$

er V utspent av $\{v_2, \dots, v_n\}$.

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

$$= a_1 (b_2 v_2 + \cdots + b_n v_n)$$

$$+ a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

$$= \sum_{i=2}^{n} (a_1 b_i + a_i)\, v_2$$

Prop: Enhver delmengde $\mathcal{E}$ av et vektorrom V utspenner et underrom av V.

<u>Bevis</u>:

$U = \{$ alle lineære kombinasjoner av elementer fra C $\}$.

//

<u>Def</u>: <u>Søylerommet</u> til en $m \times n$ matrise A er underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av alle søylene til A.

$rg(A)$ = rangen til A
$:=$ dim(søylerommet til A)

Dersom søylene er lineært uavhengige, sies A å ha <u>maksimal rang</u>.

<u>Teorem</u> For en $n \times n$ matrise gjelder:

A invertibel $\Leftrightarrow$ A har maks. rang.

<u>Bevis</u>: $\{e_1, \cdots, e_n)$: standard basis for $\mathbb{R}^n$.

$A_j :=$ j-te søyle til A.

For $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ er

$$x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

(i) Anta A er invertibel.
For hver $b \in \mathbb{R}^m$ har likningen

$$Ax = b$$

nøyaktig én løsning $x = A^{-1}b$.
Altså har A maks. rang.

(ii) Anta A har maks. rang.
Da er $(A_1, \dots, A_n)$ en basis for $\mathbb{R}^n$. For hver j finnes det derfor en $B_j \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$AB_j = e_j$$

$B :=$ $n \times n$ matrisen med søyler

$B_1, \dots, B_n$.

Da er

$$AB = I,$$

altså er A invertibel. //

<u>Eks</u>:

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \end{array}$$

$$A_3 = A_1 + A_2$$

$\Rightarrow \{A_1, A_2\}$ udspænder
søjlerummet til A.

$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) \leq 2$.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ lin. uafh.

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ lin. uafh.

$\Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 2$.

Lineær avbildninger

Def En avbildning $T: V \to W$ mellom to vektorrom kalles **lineær** dersom

$$T(av + bw) = aT(v) + bT(w)$$

for alle $v, w \in V$ og alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Merk: "Avbildning" betyr: Hvert element $v \in V$ tilordnes nøyaktig ett element $T(v) \in W$.

Prop: Hvis $T: V \to W$ er lineær, så er

$$T(0) = 0, \quad T(-v) = -T(v).$$

//

Eks: En lineær avbildning $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har formen

$$T(x) = ax, \quad \text{hvor } a \in \mathbb{R}.$$

Prop: La A være en $m \times n$ matrise. Da er

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad T(v) = Av$$

en lineær avbildning.

Bevis: $A(sv + tw) = sAv + tAw$.

//.

Lemma La $A = (a_{ij})$ være en $m \times n$ matrise og

$\{e_1, \dots, e_n\}$ standardbasis for $\mathbb{R}^n$

$\{e'_1, \dots, e'_m\}$ —— " —— " – $\mathbb{R}^m$

Da er

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$$

Bevis for $n = 3$:

$$Ae_j = j\text{-te søyle til } A = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$$

$$= a_{1j}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + a_{2j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + a_{3j}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\qquad e_1' \qquad\qquad e_2' \qquad\qquad e_3'$$

$$= \sum_{i=1}^{3} a_{ij} e_i' \, . \quad //.$$

<u>Prop</u> Hvis $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ er lineær, så fins det nøyaktig én $m \times n$ matrise A slik at

$$T(v) = Av \quad \text{for alle } v \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Bevis</u>: La $\{e_j\}$, $\{e_i'\}$ være som før.

Definer $A = (a_{ij})$ ved

$$T(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i' .$$

Da er $T(e_j) = Ae_j$ for alle j.

For $v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$ er da

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} v_j T(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} v_j A e_j$$

$$= Av. \qquad //.$$

Def: La $T: V \to W$ være en lineær avbildning og $\{v_1, \dots, v_r\}$ en basis for V, $\{w_1, \dots, w_s\}$ —— " —— W.

Matrisen $A = (a_{ij})$ til T relativt til disse basisene er definert ved

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{s} a_{ij} w_i .$$

Eks:

$$V = W = \{a\cos x + b\sin x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$v_1 := \cos x, \quad v_2 = \sin x$

$\{v_1, v_2\}$ er en basis for V.

$D : V \to V$: derivasjonsoperatoren.

$D \cos x = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

$D \sin x = \cos x$

første søyle til A

Altså:

$D v_1 = 0 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2$

$D v_2 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$

annen søyle til A

$\Rightarrow$ Matrisen A til D relativt til basisen $\{v_1, v_2\}$ er

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Eks:</u> $V = W = P_2$

$= \{\text{polynomer } ax^2 + bx + c\}$

$D : V \to V$: derivasjon.

Basis for V: $\{1, x, x^2\}$

$v_1 = 1, \quad v_2 = x, \quad v_3 = x^2$

$$D(v_1) = \frac{d}{dx} 1 = 0$$

$$= 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

Elementene i første

søyle til A.

$$D(v_2) = \frac{d}{dx} x = 1 = v_1$$

$$= 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

$$D(v_3) = \frac{d}{dx} x^2 = 2x = 2v_2$$

$$= 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$$

Matrisen til $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$