Prop For $u, v \in \mathbb{R}^3$ gjelder:

$u \times v = 0 \iff u, v$ lineært avhengig.

Bevis (i) Anta u, v lineært uavhengige. Da fins en $w \in \mathbb{R}^3$ slik at $\{u, v, w\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow (u \times v) \cdot w = [u, v, w] \neq 0$

$\Rightarrow u \times v \neq 0.$

(ii) Anta u, v lineært avhengige.

Hvis $u = 0$, er $u \times v = 0$.

Hvis $u \neq 0$, er $v = tu$ for en $t \in \mathbb{R}$, og

$$u \times v = u \times (tu) = t(u \times u) = 0. \quad //$$

<u>Def</u>: En basis $\{u, v, w\}$ for $\mathbb{R}^3$ kalles

* <u>positiv</u> dersom $[u, v, w] > 0$
* <u>negativ</u> " $[u, v, w] < 0$.

<u>Eks</u>: Standardbasisen $\{i, j, k\}$ er positiv.

5.2 Ortogonale 3x3 matriser

<u>Husk</u>: En $n \times n$ matrise A kalles <u>ortogonal</u> dersom

$$A^T \cdot A = I.$$

For enhver ortogonal matrise A gjelder:

(i) $\det(A) = \pm 1$.

(ii) Hvis λ er en reell egenverdi for A, så er $\lambda = \pm 1$.

Def:

$O(n)$ = mengden av alle ortogonale $n \times n$ matriser

$SO(n) = \{ A \in O(n) \mid \det(A) = 1 \}$.

Prop: La A være en ortogonal 3×3 matrise.

(i) Hvis $\det(A) = 1$, så er 1 en egenverdi for A.

(ii) Hvis $\det(A) = -1$, så er -1 en egenverdi for A.

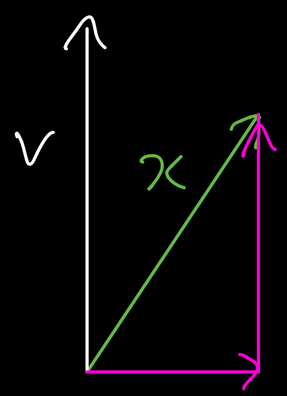
Bevis: (i) Vist tidligere.

(ii) $\det(-A) = (-1)^3 \det(A) = 1$

$\Rightarrow$ $-A$ har en egenvektor v
slik at $(-A)v = v$
dvs. $Av = -v$
$\Rightarrow$ -1 er en egenverdi for A.
//

Def: La $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.
Det ortogonale komplementet
til v er definert ved

$$v^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot w = 0 \}.$$



<u>Prop</u>: La $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$.
Da kan enhver vektor $x \in \mathbb{R}^n$ skrives entydig som

$$x = tv + y,$$

hvor $t \in \mathbb{R}$ og $y \cdot v = 0$.

<u>Bevis</u>: Eksistens: La $t = \dfrac{x \cdot v}{\|v\|^2}$,

$$y = x - tv.$$

Entydighet: Hvis

$$t_1 v + y_1 = t_2 v + y_2,$$

hvor $t_i \in \mathbb{R}$, $y_i \cdot v = 0$,

så er

$$(t_1 - t_2) v = y_2 - y_1$$

$$\Rightarrow (t_1 - t_2) \|v\|^2 = (y_2 - y_1) \cdot v$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow t_1 = t_2, \quad y_1 = y_2. \quad //$$

<u>Prop</u>: La A være en ortogonal $n \times n$ matrise og v en egenvektor for A. Da er

$$A \cdot v^\perp = v^\perp$$

dvs: $w \cdot v = 0 \implies Aw \cdot v = 0.$

<u>Bevis</u>: La $Av = \lambda v$, $\lambda = \pm 1$.

Hvis $w \cdot v = 0$, er

$$0 = w \cdot v = Aw \cdot Av = Aw \cdot \lambda v$$
$$= \lambda (Aw \cdot v)$$

$$\underset{\lambda = \pm 1}{\implies} Aw \cdot v = 0. \qquad //.$$

Prop: La $w \in \mathbb{R}^3$, $\|w\| = 1$.

Da fins vektorer $u, v \in \mathbb{R}^3$

slik at $\{u, v, w\}$ er en positiv ortonormert basis for $\mathbb{R}^3$.

<u>Bevis</u>: Velg $v \in w^\perp$, $\|v\| = 1$.
Sett $u = v \times w$. Da er

$$\|u\| = \|v\| \cdot \|w\| = 1.$$

$$[u, v, w] = u \cdot (v \times w) = \|u\|^2 = 1.$$

//.

5.3 Isometrier i $\mathbb{R}^3$

<u>Def</u>: En isometri $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som bevarer origo, kalles en <u>punktsymmetri</u> (av $\mathbb{R}^3$).

<u>Husk</u>: En punktsymmetri har formen

$$m(x) = Ax,$$

hvor $A \in O(3)$.

Def: En punktsymmetri med matrise

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kalles en *rotasjon* om z-aksen med rotasjonsvinkel $\theta \in \mathbb{R}$.

Merk: θ og $2\pi k$ gir samme rotasjon for $k \in \mathbb{Z}$.
Vi sier at θ er bestemt *modulo 2π*.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot x - \sin\theta \cdot y \\ \sin\theta \cdot x + \cos\theta \cdot y \\ z \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>: Med en <u>orientering</u> av en linje L i $\mathbb{R}^n$ mener vi en enhetsvektor parallell med L.

("v enhetsvektor" betyr $\|v\| = 1$)

<u>Merk</u> Enhver linje har nøyaktig to orienteringer.

<u>Eks</u>: $k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er standard

orientering av z-aksen.

<u>Def</u>: For $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ skriver vi

$$\mathbb{R}v = \{ tv \mid t \in \mathbb{R} \}.$$

= linjen gjennom 0 og v.

Vi lar $\mathbb{R}v$ ha orienteringen

$$\|v\|^{-1} \cdot v.$$

<u>Def</u>: La $w \in \mathbb{R}^3$, $\|w\| = 1$, og $\theta \in \mathbb{R}$. <u>Rotasjonen</u> om linjen $\mathbb{R}w$ med rotasjonsvinkel θ er den lineære avbildningen

$$R_{w,\theta} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definert som følger: Velg vektorer u, v slik at

$$\mathcal{B} = \{u, v, w\}$$

er en positiv ortonormert basis for $\mathbb{R}^3$. Da er matrisen til $R_{w,\theta}$ relativt til $\mathcal{B}$ gitt ved

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eksplisitt: La $R = R_{w,\theta}$.

$$Ru = \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot v$$
$$Rv = -\sin\theta \cdot u + \cos\theta \cdot v$$
$$Rw = w.$$

<u>Merk</u> $R_{w,\theta}$ avhenger ikke av valget av u, v.

<u>Prop</u>: (i) $R_{w,\theta+2\pi k} = R_{w,\theta}$ for $k \in \mathbb{Z}$

(ii) $R_{-w,-\theta} = R_{w,\theta}$. //

Prop: La (u, v, w) være en positiv ortonormert basis for $\mathbb{R}^3$, og $\theta \in \mathbb{R}$. Matrisen til rotasjonen $R_{w,\theta}$ relativt til standardbasisen (i, j, k) er da

$$CBC^{-1},$$

hvor

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C = matrisen med søyler u, v, w.

<u>Bevis</u>:

C sender basisen (i, j, k) på (u, v, w)
$\Rightarrow C^{-1}$ sender (u, v, w) på (i, j, k).

$$CBC^{-1}u = CBi$$
$$= C(\cos\theta \cdot i + \sin\theta \cdot j)$$
$$= \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot v$$
$$CBC^{-1}v = CBj$$
$$= -\sin\theta \cdot u + \cos\theta \cdot v$$
$$CBC^{-1}w = CBk = Ck = w. \quad //$$