Mer om lineære avbildninger.

Def For en lineær avbildning $T : V \to W$ mellom to vektorrom definerer vi

* Kjernen (= nullrommet)

$$N(T) := \{ v \in V \mid T(v) = 0 \}$$

* Bildet

$$R(T) := \{ T(v) \mid v \in V \}.$$

Prop: (i) $N(T)$ er et underrom av V.

(ii) $R(T)$ er et underrom av W.

<u>Bevis</u>: (i) Hvis $T(v_1) = 0 = T(v_2)$ og $a, b \in \mathbb{R}$, så er

$$T(av_1 + bv_2) = aT(v_1) + bT(v_2) = 0.$$

(ii) Liknende. //

<u>Observasjon</u> Hvis $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er gitt ved en $m \times n$ matrise A, er

$$R(T) = \text{søylerommet til } A$$

fordi hvis $x = (x_1, \dots, x_n)$, er

$$Ax = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n.$$

<u>Eks:</u> La $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ væra gitt ved matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Har sett tidligere at $\underset{\dim R(T)}{\overset{\shortparallel}{rg(A)}} = 2$.

Vil bestemme $N(T)$, dvs. vi søker alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ slik at

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

altså

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ 3x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 & \mathrm{I} \\ 2x - y + z = 0 & \mathrm{II} \\ 3x + y + 4z = 0 & \mathrm{III} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 & \mathrm{I} \\ -y - z = 0 & \mathrm{II} - 2\mathrm{I} \\ y + z = 0 & \mathrm{III} - 3\mathrm{I} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette viser at

$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en basis for $N(T)$.

<u>Merk</u>

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = 1 + 2$$
$$= \dim N(T) + \dim R(T).$$

<u>Teorem</u> Hvis $T : V \to W$ er lineær og V har endelig dimensjon, så er
$$\dim V = \dim N(T) + \dim R(T)$$

<u>Bevis</u>: $n := \dim(V)$,

$$q := \dim N(T) \leq n$$

$$p := n - q.$$

Velg en basis $(v_{p+1}, \ldots, v_{p+q})$ for $N(T)$. Vi kan finne $v_1, \ldots, v_p \in V$ slik at

$$\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}\}$$

er en basis for V. La

$$w_i := T(v_i), \qquad i = 1, \ldots, p.$$

Vi vil vise at $\{w_1, \ldots, w_p\}$ er en basis for W, slik at

$$\dim V = n = p + q = \dim R(T) + \dim N(T).$$

(i) $\{w_1, \dots, w_p\}$ utspenner $R(T)$.

La $v \in V$. Da er

$$v = \sum_{i=1}^{p+q} a_i v_i \quad , \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

$$T(v) = \sum_{i=1}^{p+q} a_i T(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i T(v_i) + \sum_{i=p+1}^{p+q} a_i \underbrace{T(v_i)}_{0}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i w_i$$

(ii) $\{w_1, \dots, w_p\}$ er lin. uavhengig.

Anta $\sum_{i=1}^{p} a_i w_i = 0$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Da er

$$T\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i}_{x}\Big) = \sum_{i=1}^{p} a_i w_i = 0$$

Altså er $x \in N(T)$, så

$$x = \sum_{i=p+1}^{p+q} a_i v_i, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$

$$0 = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p$$
$$- a_{p+1} v_{p+1} - \dots - a_{p+q} v_{p+q}$$

Siden $\{v_1, \dots, v_{n+f}\}$ er en basis for V, må $a_i = 0$ for alle i.

//.

<u>Def</u>: La $T: V \to V$ være en lineær avbildning. En vektor $v \in V$ ulik 0 kalles en egenvektor dersom det fins et reelt tall λ slik at

$$T(v) = \lambda v.$$

I så fall kalles λ en <u>egenverdi</u>

Eks:

$C^\infty(\mathbb{R}) :=$ { alle uendelig mange ganger deriverbare funksjoner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ }

$D : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$,

$$(Df)(x) = f'(x)$$

La $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x)$$

D.v.s. $Df = \lambda f$

$\Rightarrow e^{\lambda x}$ er en egenvektor for D med egenverdi λ.

<u>Teorem</u> La $T: V \to V$ være en lineær avbildning, og la $v_1, \dots, v_s$ være egenvektorer for T med egenverdier $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, dvs.

$$T(v_i) = \lambda_i v_i.$$

Hvis $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ er parvis forskjellige (altså $\lambda_i \neq \lambda_j$ for alle $i \neq j$), så er $\{v_1, \dots, v_s\}$ lineært uavhengig.

Bevis: Vi viser at $\{v_1, \dots, v_k\}$ er lineært uavhengig for $k = 1, \dots, s$ ved induksjon på k.

$k=1$: $\{v_1\}$ lin. uavh. fordi $v_1 \neq 0$.

$1 < k \leq s$: Anta $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ er lin. uavhengig, og

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0.$$

Da er

$$0 = T\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i T(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i v_i.$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i v_i - \lambda_k \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} a_i \underbrace{(\lambda_i - \lambda_k)}_{\neq 0} v_i$$

$$\Rightarrow \quad a_i = 0 \quad \text{for} \quad i = 1, \dots, k-1.$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i = a_k \underbrace{v_k}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \quad a_k = 0$$

Dette viser at $(v_1, \dots, v_k)$ er lineært uavh. //

Korollar Hvis $T: V \to V$ er lineær og $\dim V = n$, så har T høyst n forskjellige egenverdier.

Def: En basis $(v_1, \cdots, v_n)$ for $\mathbb{R}^n$ kalles ortonormert dersom

$$\|v_i\| = 1, \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$v_i \cdot v_j = 0 \quad \text{for } i \neq j.$$

__Spektralteoremet__ Hvis A er en symmetrisk $n \times n$ matrise, så har $\mathbb{R}^n$ en ortonormert basis som består av egenvektorer til A.

__Ekvivalent__: $A = CDC^{-1}$, hvor

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

og C er ortogonal.

__Eks__: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Finn egenvektorene og egenverdiene til A.

$$tr(A) = 2$$

$$det(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A) \cdot \lambda + det(A)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

$$= (\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

$\Rightarrow$ A har egenverdier

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 3.$$

<u>Egenrommet</u> til $\lambda_1 = -1$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Av = -v \}$$

$$Av = -v \iff (A+I)v = 0$$

$$A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$\iff x + y = 0.$$

Altså er $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ er en basis for egenrommet til $\lambda_1 = -1$.

Egenrommet til $\lambda_2 = 3$

$$= \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid Av = 3v \}$$

$$Av = 3v \iff (A - 3I)v = 0$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$Av = 3v \iff 0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

$\iff x = y$

Altså er $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ er en basis for egenrommet til $\lambda_2 = 3$.

<u>Merk</u>: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

er en ortonormert basis for $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer til A.