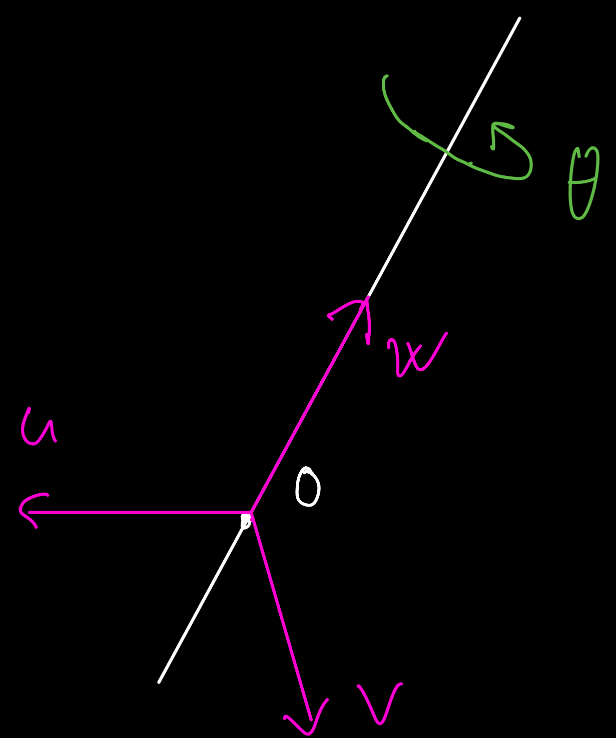
Mer om isometrier i $\mathbb{R}^3$

Har vist:



$\{u, v, w\}$ pos. orton. basis for $\mathbb{R}^3$.

Rotasjonen $R_{w,\theta}$ om linjen $\mathbb{R}w$

med rot.vinkel θ er gitt ved

$$R_{w,\theta}(x) = CBC^{-1}x,$$

hvor

$C =$ matrisen med søylevektorer u, v, w,

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorem La $A \in O(3)$, $\varepsilon = \det(A) = \pm 1$.

Da fins det en $C \in SO(3)$ og $\theta \in \mathbb{R}$ slik at

$$A = CBC^{-1},$$

hvor
$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Merk: $C^{-1} = C^T$.

<u>Bevis</u>: La w være en egenvektor

for A med $\|w\| = 1$ og

$$Aw = \varepsilon w.$$

Velg u, v slik at $\{u, v, w\}$

er en positiv ortonormert basis

for $\mathbb{R}^3$. La C være matrisen

med søyler u, v, w, og

$$B := C^{-1}AC.$$

La $\{i, j, k\}$ være standardbasis

for $\mathbb{R}^3$. Da er

$$Bk = C^{-1}ACk = C^{-1}Aw$$

$$= C^{-1}(\varepsilon w) = \varepsilon k.$$

Siden B er ortogonal, må B

bevar ortogonalkomplementet

$K^{\perp} = xy$-planet.

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

for passende reelle tall a, b, c, d.

B ortogonal $\Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ortogonal.

$$\varepsilon(ad - bc) = \det(B)$$

$$= \det(C)^{-1} \cdot \det(A) \cdot \det(C)$$

$$= \det(A) = \varepsilon.$$

$\Rightarrow$ $ad - bc = 1.$

$\Rightarrow$ Det fins en $\theta \in \mathbb{R}$ slik at

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

//.

<u>Korollar</u>: Enhver orienterings-bevarende punktsymmetri av $\mathbb{R}^3$ er rotasjon om en linje. //.

Teorem Enhver orienteringsreverserende punktsymmetri $m: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har formen

$$m(x) = BQ_w(x),$$

hvor $B \in SO(3)$, $Bw = w$, og

Q_w = Householder-transformasjon til w.

Bevis: La $m(x) = Ax$, hvor

$A \in O(3)$, $\det(A) = -1$.

Då har A en egenvektor w

med $Aw = -w$. Vi har

$$Q_w(w) = -w,$$

så $B = AQ_w$ uppfyller

$$Bw = w,$$

$$\det(B) = \det(A) \cdot \det(Q_w)$$

$$= (-1) \cdot (-1) = 1.$$

Da både A og Q_w er ortogonale er også B ortogonal. //.

<u>Korollar</u> Enhver orienterings-reverserende punktsymmetri av $\mathbb{R}^3$ er en sammensetning av en speiling i et plan og en rotasjon om en linje. //.

<u>Eks</u>: La $m(x) = Ax$, hvor

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har $\det(A) = 1$, og

$$Ai = j, \quad Aj = k, \quad Ak = i$$

$$\begin{tikzcd} & i \arrow[dr, bend left] & \\ k \arrow[ur, bend left] & & j \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow A^3 = I$. La

$$w = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da er $\|w\| = 1$ og $Aw = w$.

Vi vil vise at m er rotasjonen

om $\mathbb{R}w$ med rot. vinkel $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Vi velger $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Da må

$$v = w \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-i - (-2)j + (-1)k \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-i + 2j - k \right)$$

Vi har, for parende $\theta \in \mathbb{R}$:

$$Au = \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot v$$

$$Av = -\sin\theta \cdot u + \cos\theta \cdot v.$$

$$Au = \frac{1}{\sqrt{2}} A(i-k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(j-i)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$Av = \frac{1}{\sqrt{6}} A\left(-i + 2j - k\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left(-j + 2k - i\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos\theta = Au \cdot u = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = Au \cdot v = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \mod 2\pi$. //.

<u>Prop</u> Enhver punktsymmetri $m: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kan uttrykkes som et produkt av to eller tre speilinger (i plan).

<u>Bevis</u>: (i) Anta m er orienterings-bevarende, dvs.

$$m(x) = Ax$$

hvor $A \in SO(3)$. La w være

en egenvektor for A med

$\|w\| = 1$, $Aw = w$.

Restriksjon av m til normal-

planet $W = w^{\perp}$ er en

rotasjon $R: W \to W$ om 0.

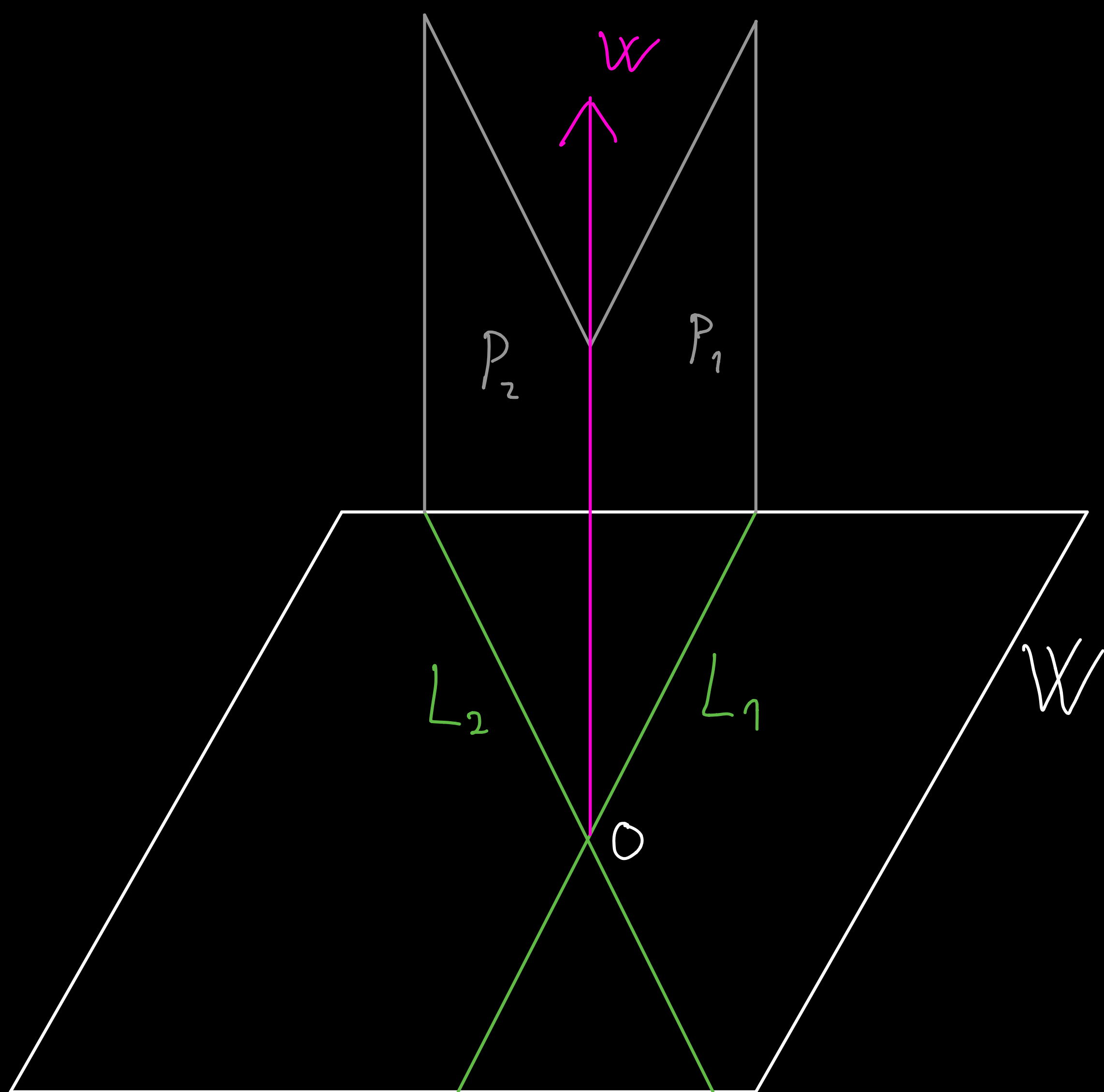
$\Rightarrow$ $R = \sigma_1 \circ \sigma_2$, hvor

$\sigma_i : W \to W$ er speiling i

en linje $L_i \subset W$.

La P_i være planet i $\mathbb{R}^3$

som inneholder både w og L_i.



La $S_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være speilingen i P_i, $i = 1,2$.

Da er

$$m = S_1 \circ S_2 .$$

(ii) Anta m er orienterings-reverserende. Da er

$$m = \underbrace{(\text{rotasjon})}_{(\text{speiling}) \circ (\text{speiling})} \circ (\text{speiling})$$

//

<u>Prop</u>: La $m_1, m_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

være speilingene i to ikke-

parallelle plan P_1, P_2 hhv.

Da er $m_1 \circ m_2$ en rotasjon

om linjen $L = P_1 \cap P_2$

med rot. vinkel

$$\theta = \pm 2 \angle (P_1, P_2),$$

hvor fortegnet avhenger av

orienteringen av L.

<u>Bevis</u>: $m_1 \circ m_2$ bevarer orientering og holder L i ro. //

<u>Teorem</u>: La $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være en punktsymmetri gitt ved

$$m(x) = Ax$$

og med fikspunktmengde F_m.

(i) Hvis $A = I$, er $\mathcal{F}_m = \mathbb{R}^3$.

(ii) Hvis $\det(A) = 1$, $A \neq I$, er $\mathcal{F}_m$ en linje.

(iii) Hvis $\det(A) = -1$, er $\mathcal{F}_m$ enten et punkt eller et plan. //.