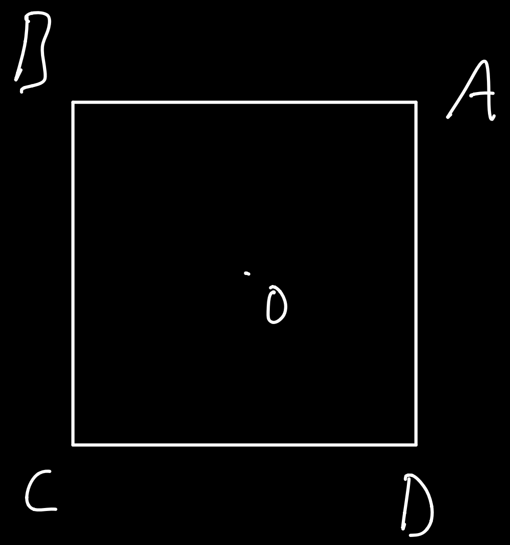
# Mer om symmetrigrupper (fra 7.1)

**Eks:** Symmetrigruppa til et kvadrat $K$.




$A = (1,1)$

$B = (-1,1)$

$C = (-1,1)$

$D = (1,-1)$.

$\rho$ = rotasjon om origo med vinkel $\frac{\pi}{2}$.

$\rho^4 = Id$

Matrisen til $\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Orienteringsbevarende symmetrier av $K$:

$\{Id, \rho, \rho^2, \rho^3\}$.

$\mu$ = speiling om $x$-aksen

$$\mu^2 = Id.$$

Orienteringsreverserende symmetrier av $K$:

$$\{\mu, \rho\mu, \rho^2\mu, \rho^3\mu\}.$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sym}(K) = \{Id, \rho, \rho^2, \rho^3, \mu, \rho\mu, \rho^2\mu, \rho^3\mu\}.$$

som mengde.

Det gjenstår å bestemme multiplikasjonen i $\mathrm{Sym}(K)$.

Eks: $\rho^3 \cdot \mu\rho^2$

$$\mu\rho = ?$$

$$\mu f \mu(A) = \mu f(D) = \mu(A) = D$$
$$= f^{-1}(A)$$

$$\Rightarrow \mu f \mu = f^{-1}$$
$$\Rightarrow \mu f = f^{-1}\mu.$$

<u>Lemma</u> For alle $i \geq 0$ er

$$\mu f^i = f^{-i}\mu.$$

hvor $f^{-i} = (f^{-1})^i = (f^i)^{-1}.$

$$f^0 = Id.$$

<u>Bevis</u>: $i = 0, 1$: Allerede vist.

Anta $i \geq 1$ og at $\mu f^i = f^{-i}\mu$.

Da er

$$\mu\rho^{i+1} = \mu\rho^{i}\cdot\rho = \rho^{-i}\mu\rho$$
$$= \rho^{-i}\cdot\rho^{-1}\mu = \rho^{-i-1}\mu$$

Ved induksjon må $\mu\rho^{i} = \rho^{-i}\mu$ for alle $i \geq 0$. //

<u>Korollar</u>: For alle $i, j \geq 0$ er

$$\rho^{i}\mu\rho^{j} = \rho^{i}\rho^{-j}\mu = \rho^{i-j}\mu.$$

Vi ser at multiplikasjonen i $Sym(K)$ er bestemt av relasjonene

$$\rho^{4} = \mu^{2} = Id, \quad \mu\rho = \rho^{-1}\mu.$$

Vi skriver derfor

Sym(K)

$$= \langle \underbrace{\rho, \mu}_{\text{generatorer}} \mid \underbrace{\rho^4 = \mu^2 = \mathrm{Id}, \; \mu\rho = \rho^{-1}\mu}_{\text{relasjoner.}} \rangle$$

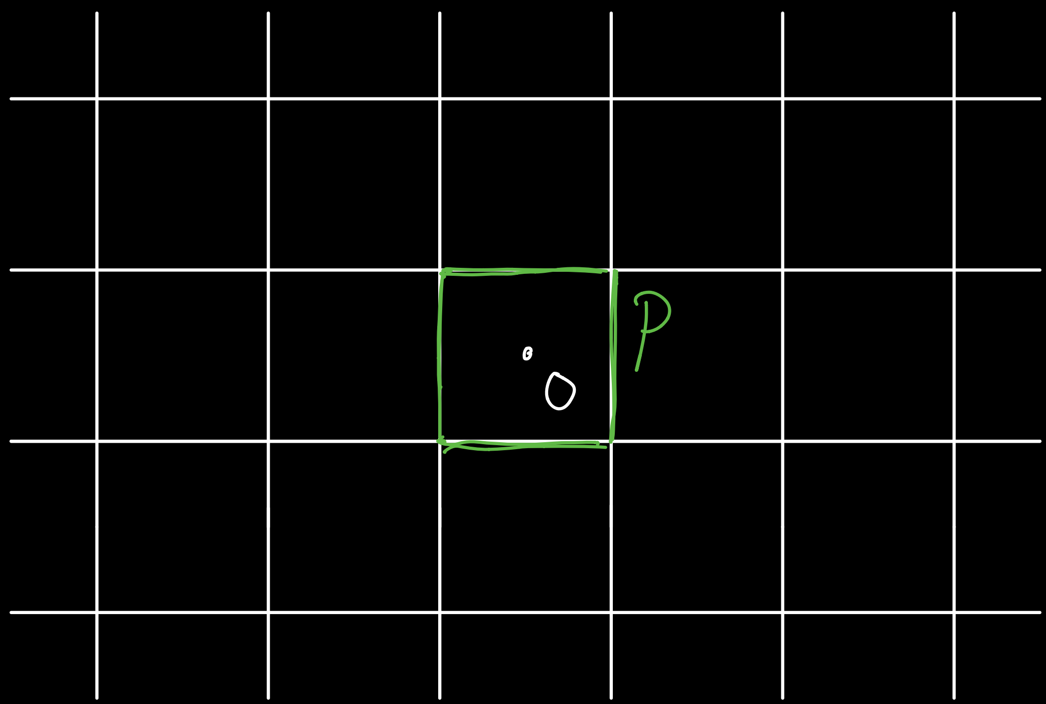
= diedergruppa $D_4$.

Eks: Symmetrigruppa til

kvadratstrukturen $P$ i $\mathbb{R}^2$

med hjørner

$$\left(m + \tfrac{1}{2}, n + \tfrac{1}{2}\right), \quad m, n \in \mathbb{Z}.$$




**Prop:** Sym(P) består av alla isometrier

$$m(x) = Ax + v$$

hvor

* $A$ representerar en symmetri av cellen $P$,
* $v \in \mathbb{Z}^2$.

<u>Bevis</u>: (i) Enhver slik isometri

$m$ bevarer $P$:

(iii) La $m(x) = Ax + v$ være

en vilkårlig symmetri av $P$,

hvor $A$ er en ortogonal $2 \times 2$

matrise og $v \in \mathbb{R}^2$. Da må

$$v = m(0)$$

være sentrum i en celle i $P$,

så $v \in \mathbb{Z}^2$. Isometrien

$$m'(x) = m(x) - v = Ax$$

er en symmetri av $P$ som

bevarer origo, så $m'(P) = P$. //

Korollar: Sym(P) kan identifiseres med $D^4 \times \mathbb{Z}^2$ som mengde.

Produktet i Sym(P): La

$$m_1(x) = A_1 x + v_1$$

$$m_2(x) = A_2 x + v_2.$$

Da er

$$m_2(m_1(x)) = A_2(A_1 x + v_1) + v_2$$

$$= A_2 A_1 x + A_2 v_1 + v_2$$

Som gruppe er Sym(P) et semi-direkte produkt:

$\mathrm{Sym}(B) = D^4 \ltimes \mathbb{Z}^2.$

## 7.2 Abstrakte grupper

Def: En gruppe er en mengde $G$ utstyrt med en binær operasjon

$$\mu : G \times G \to G, \quad (g,h) \mapsto gh$$

som oppfyller følgende betingelser:

(i) Assosiativitet: For alle $g_1, g_2, g_3 \in G$ er

$$(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$$

(ii) Eksistens av et enhetselement:

Det finns et element $e \in G$ slik at

$$eg = ge = g \quad \text{for alle } g \in G.$$

(iii) Eksistens av inverser:

For hver $g \in G$ finns det et element $g^{-1} \in G$ slik at

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

Merk: * Elementet $e$ er entydig bestemt av (ii): Hvis $e' \in G$ har den samme egenskap, altså

$$e'g = ge' = g \quad \text{for alle } g \in G,$$

så er

$$e = ee' = e'.$$

* Et liknende argument viser at elementet $g^{-1}$ er entydig bestemt av (iii).

<u>Notasjon</u>: Hvis $g \in G$ definerer vi

$g^2 = gg$, $g^3 = ggg$,

$g^n = g \cdots g$ ($n$ ganger, for $n \geq 1$)

$g^0 = e$.

$g^{-n} = (g^{-1})^n = (g^n)^{-1}$ for $n \geq 1$.

$gh = hg$? Ikke alltid!

**Def:** En gruppe $G$ med binæroperasjon $\mu$ kalles abelsk dersom

$$\mu(g,h) = \mu(h,g)$$

for alle $g, h \in G$.

**Merk:** I dette tilfellet skriver vi ofte $g+h$ i stedet for $\mu(g,h)$, og

$$ng = g + g + \cdots + g \quad (n \text{ ganger})$$

$n \geq 1$.

**Eksempler:**

① $\mathbb{Z}$ er en abelsk gruppe med

$\mu(m,n) = m+n.$

② $\mathbb{R}$ er en abelsk gruppe

③ Ethvert vektorrom er en abelsk gruppe under addisjon

④ $GL(n,\mathbb{R}) = \{$mengden av alle invertible $n\times n$ reelle matriser$\}$

: gruppe under matrisemultiplikasjon

⑤ Symmetrigruppa til en delmengde av $\mathbb{R}^n$.

__Def__: La $G$ være en gruppe.
En ikke-tom delmengde $H \subset G$ kalles en __undergruppe__ av $G$ dersom

* $ab \in H$ for alle $a, b \in H$.
* $a^{-1} \in H$ for alle $a \in H$.

__Merk__: I så fall er $H$ selv en gruppe med den samme binæroperasjon som i $G$.

__Eks__: * $\mathbb{Z}$ er en undergruppe av $\mathbb{R}$

* $O(n)$ er en undergruppe av $GL(n, \mathbb{R})$.