4.1 Geometrisk tolkning av lineær avbildninger

Vi studerer lineær avbildninger

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Def: Følgende tre typer lineær avbildninger $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kalles <u>elementær</u>:

(i) Skalering, gitt ved en matrise

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix},$$

hvor $t_1, t_2 \neq 0$. Spesialtilfeller:

$$X_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix},$$

hvor $t \neq 0$.

(ii) Permutering, med matrise

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) <u>Forskyvning</u>, med matrise

$$F_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

hvor $t \in \mathbb{R}$.

Matrisene X_t, Y_t, σ og F_t kalles <u>elementær</u>.

Merk:
$$(X_t)^{-1} = X_{t^{-1}}$$
$$(Y_t)^{-1} = Y_{t^{-1}}$$

$$\sigma\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

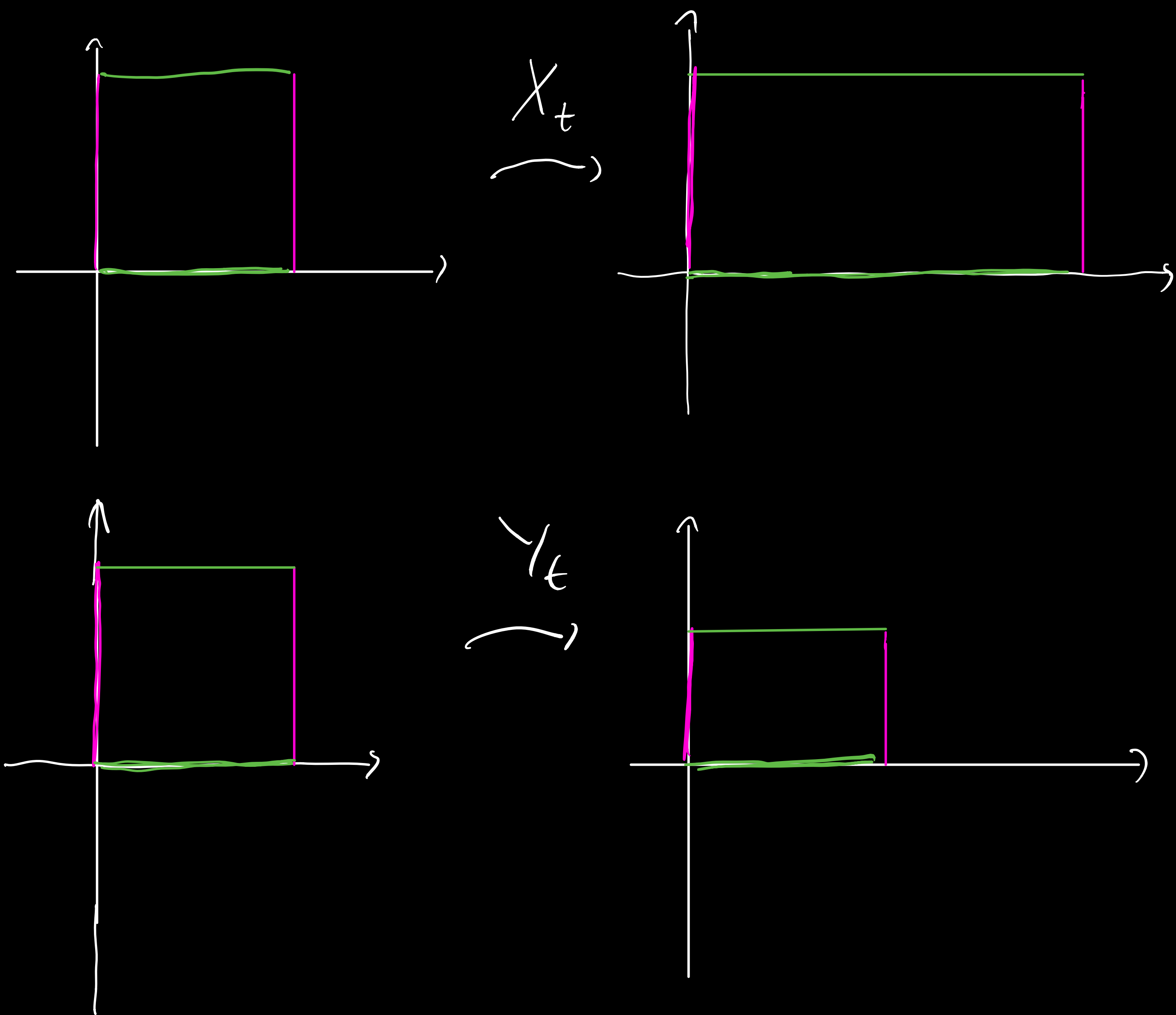
$$\Rightarrow \quad \sigma^{-1} = \sigma.$$

$$F_{t_1} F_{t_2} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

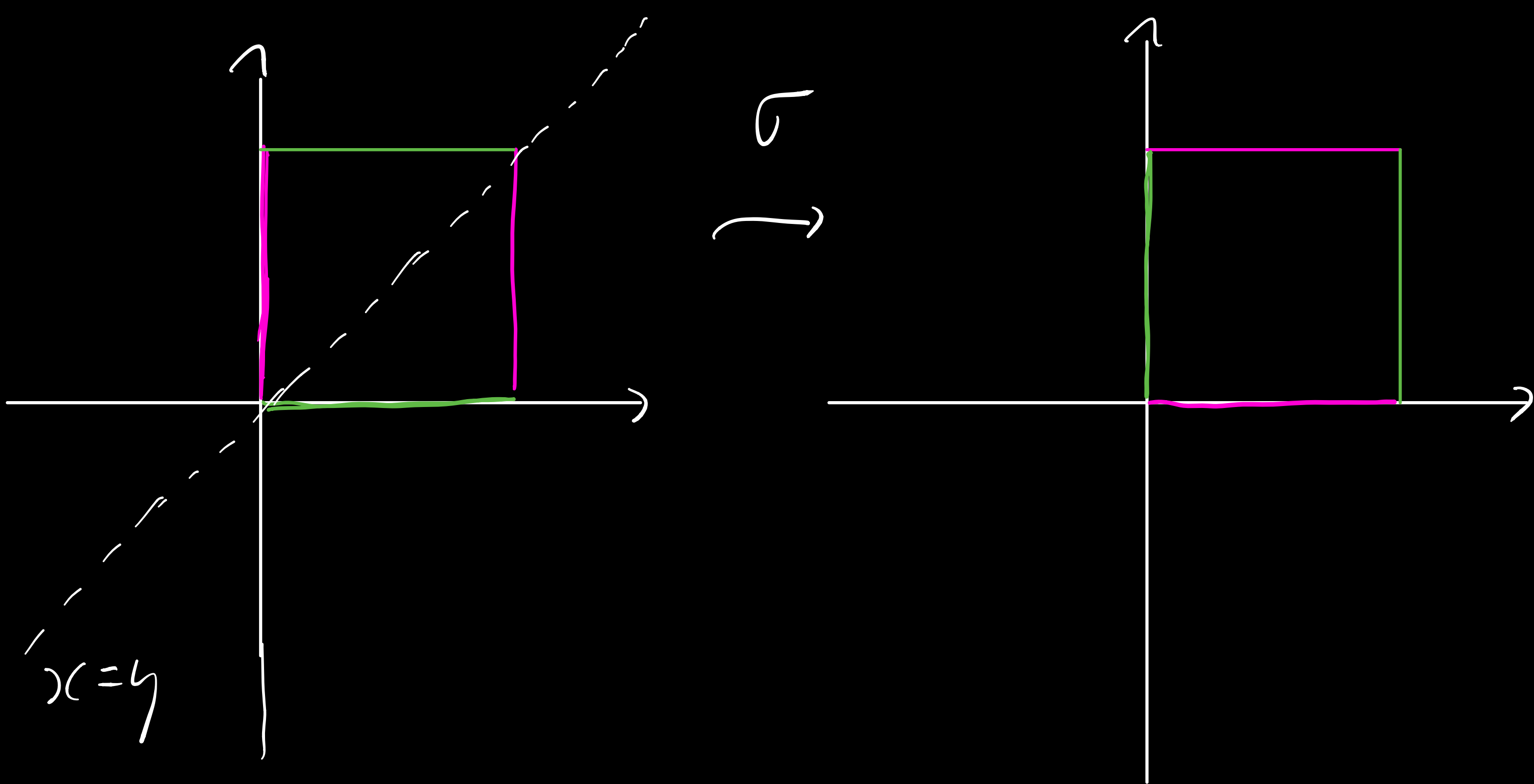
$$= \begin{pmatrix} 1 & t_1+t_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = F_{t_1+t_2}.$$

Geometrisk beskrivelse:

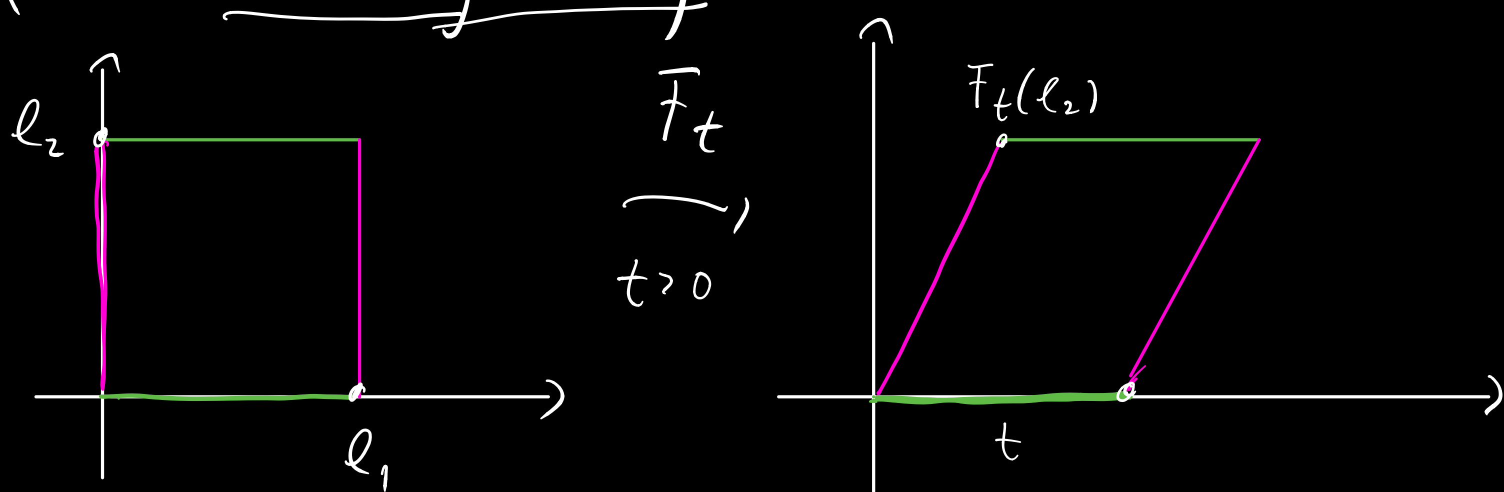
(i) Skalering:



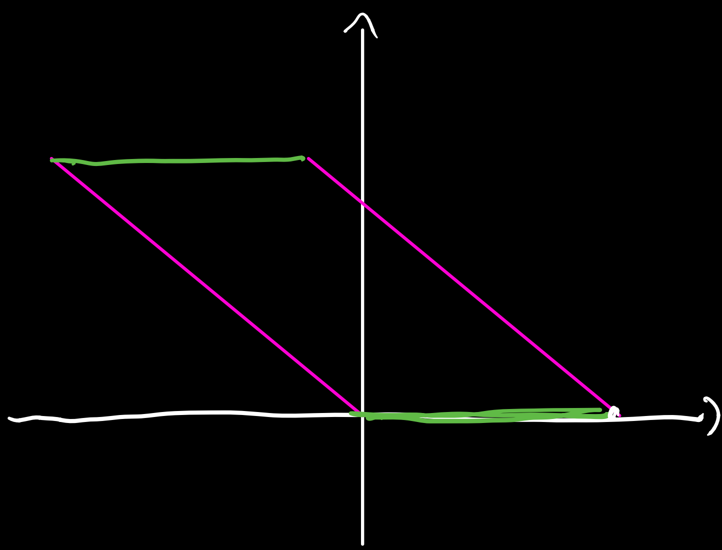
(ii) <u>Permutering</u>: Speiling i linjen $x=y$:



(iii) <u>Forskyvning</u>:



$\downarrow F_t, \quad t < 0$



$$F_t(e_1) = e_1$$

$$F_t(e_2) = te_1 + e_2$$

<u>Teorem</u> Enhver invertibel 2×2 matrise kan skrives som et produkt av elementære matriser.

<u>Bevis</u>: Vi eksperimenterer litt:

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 a & t_1 c \\ t_2 b & t_2 d \end{pmatrix}$$

Første rad mult. med t_1
annen rad med t_2

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 a & t_2 c \\ t_1 b & t_2 d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$$

Bytter om radene.

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+tb & c+td \\ b & d \end{pmatrix}$$

Erstatter rad I

med I + t II.

La nå $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ være invertibel.

(i) A øvre triangulær, dvs. $b = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= Y_d F_c X_a$$

(ii) $b \neq 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{b} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c - \frac{ad}{b} \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c-\frac{ad}{d} \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & c-\frac{ad}{b} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{tilfelle (ii)}}{=} \quad E_1 E_2 E_3 ,$$

hver E_i er elementær.

$$\sigma F_{-\frac{a}{b}} A = E_1 E_2 E_3$$

$$\Rightarrow \quad A = F_{\frac{a}{b}} \sigma E_1 E_2 E_3 . \quad //$$

4.2 Stive bevegelser i planet

<u>Husk</u>: For $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

: normen til v.

<u>Avstanden</u> mellom to punkter

$x, y \in \mathbb{R}^n$ er $\|x - y\|$.

<u>Def</u>: En avbildning $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

kalles en <u>isometri</u> dersom

$$\|m(x) - m(y)\| = \|x - y\|$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

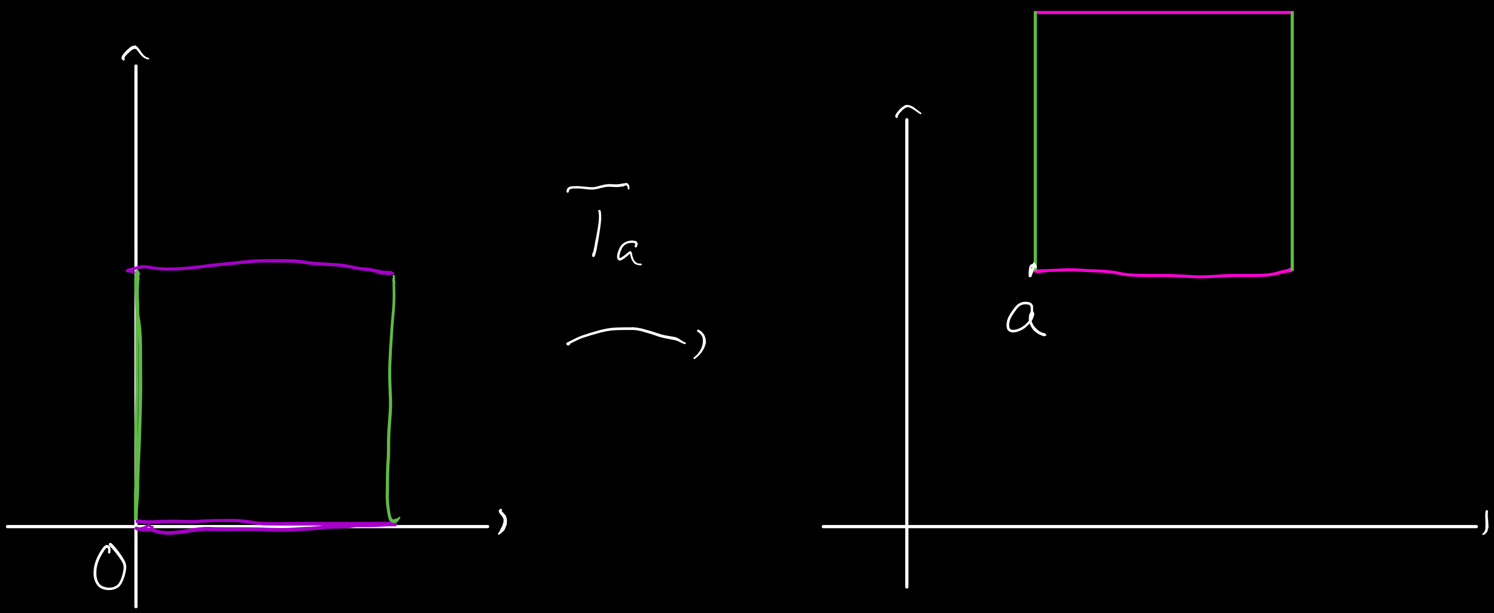
Def: En <u>translasjon</u> i $\mathbb{R}^n$

er en avbildning $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

gitt ved

$$T_a(x) = x + a \qquad (x \in \mathbb{R}^n),$$

hvor $a \in \mathbb{R}^n$.



Merk: $T_b(T_a(x)) = x + a + b$

$= T_{a+b}(x)$

$T_a(x+y) = x + y + a$

$T_a(x) + T_a(y) = (x+a) + (y+a)$

$= x + y + 2a$

Altså: Hvis $a \neq 0$, er T_a

ikke en lineær avbildning!

Prop: T_a er en isometri.

Bevis: For $x, y \in \mathbb{R}^n$ er:

$$\|T_a(x) - T_a(y)\| = \|(x+a) - (y+a)\|$$
$$= \|x - y\|. \quad //$$

Husk: En $n \times n$ matrise A

kalles ortogonal dersom

$$A^T \cdot A = I.$$

Har vist: A ortogonal

$$\Updownarrow$$

$$Ax \cdot Ay = x \cdot y$$
for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Prop: Hvis A og B er ortogonale $n \times n$ matriser, gjelder:

(i) A^{-1} er ortogonal

(ii) AB er ortogonal.

<u>Bevis</u>: (i)

$$A^{-1}x \cdot A^{-1}y = A(A^{-1}x) \cdot A(A^{-1}y)$$
$$= x \cdot y.$$

(ii) $$ABx \cdot ABy = Bx \cdot By$$
$$= x \cdot y. \quad //.$$

<u>Prop</u>: Hvis A er en ortogonal $n \times n$ matrise, er avbildningen

$$m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad m(x) = Ax,$$

en isometri.

<u>Bevis</u>: $\|Ax - Ay\|^2$

$= (Ax - Ay) \cdot (Ax - Ay)$

$= A(x-y) \cdot A(x-y)$

$= (x-y) \cdot (x-y)$

$= \|x-y\|^2$ //.

Teorem For en avbildning

$$m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

er følgende ekvivalent:

(i) Avbildningen m er en isometri

og $m(0) = 0$.

(ii) $m(x) \cdot m(y) = x \cdot y$

for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Det finnes en ortogonal $n \times n$

matrix A slik at for alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$m(x) = Ax.$$

Bevis: (i) $\Rightarrow$ (ii):

For alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ er:

$$\|m(x) - m(y)\| = \|x - y\|.$$

For $y = 0$: $\quad \|m(x)\| = \|x\|.$

$$(x-y)\cdot(x-y) = x\cdot x - 2x\cdot y + y\cdot y$$

$$x \cdot y = \frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\| m(x) - m(y) \| - \| m(x) \|^2 - \| m(y) \|^2 \right)$$

$$= m(x) \cdot m(y).$$

Resten av beviset: Neste gang.