Mer om isometrier i $\mathbb{R}^3$

La $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $m(x) = Ax$, hvor A er en ortogonal 3×3 matrise. Hva slags isometri er m?

$A = I$?

Ja → m = identitetsavbildningen

Nei ↓

$A = -I$?

Ja → m = speiling i origo

Nei ↓

$\det(A) = 1$? $\xrightarrow{\text{Ja}}$ m = rotasjon om en linje gjennom origo.

Nei

$A^2 = I$? $\xrightarrow{\text{Ja}}$ m = speiling i et plan.

Nei

$$m = (\text{rotasjon om } \mathbb{R}w) \circ (\text{speiling i } w^{\perp})$$

hvor $0 \neq w \in \mathbb{R}^n$.

Eksempel: Se utskrift fra Python.

6.1 Et generelt indreproduktbegrep.

Analogi til skalarproduktet i $\mathbb{R}^n$:

Hvis $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx.$$

<u>Def</u>: La V være et reelt vektorrom.

Et <u>indreprodukt</u> på V er en regel som for hvert par $v, w \in V$ gir et reelt tall

$$\langle v, w \rangle,$$

slik at følgende gjelder:

(i) Bilinearitet:

$\langle au+bv, w\rangle = a\langle u,w\rangle + b\langle v,w\rangle$

(ii) Symmetri: $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle$

(iii) Positivitet:

$\langle v,v\rangle > 0$ hvis $v \neq 0$.

<u>Merk</u>: Hvis $v=0$, er $\langle v,v\rangle = 0$.

<u>Def</u>: Euklidsk rom

= reelt vektorrom med indreprodukt.

Def: $\|v\| := \sqrt{\langle v,v \rangle}$; Normen til v.

Prop (Pythagoras) Hvis $u, v \in V$, $\langle u,v \rangle = 0$, er

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Bevis:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle$$

$$= \|u\|^2 + \|v\|^2. \quad //$$

Teorem (Cauchy-Schwarz)

La V være et Euklidske rom og $u, v \in V$. Da er

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|.$$

Hvis likhet gjelder, er u og v lineært avhengige.

Bevis: (i) Hvis $u=0$: Trivielt.

(ii) Antar $u \neq 0$. For $t \in \mathbb{R}$ la

$$f(t) = \|tu+v\|^2 = \langle tu+v, tu+v\rangle$$

$$= t^2 \underbrace{\|u\|^2}_{>0} + 2t\langle u,v\rangle + \|v\|^2.$$

Da er $f(t) \geq 0$ for alle t, og

f har sitt minimum der $f' = 0$.

$$f'(t) = 2t\|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}.$$

La $t_0 = -\dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2}$.

$$0 \leq f(t_0)$$

$$= \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} - 2\cdot\frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2} + \|v\|^2$$

$$= \|v\|^2 - \frac{\langle u,v\rangle^2}{\|u\|^2}$$

$$\Rightarrow \langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2\cdot\|v\|^2$$

$$\Leftrightarrow |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|.$$

Hvis likhet gjelder, er

$$0 = f(t_0) = \|t_0 u + v\|^2$$

$$\Rightarrow t_0 u + v = 0$$

$\Rightarrow$ u, v er lineart avhengige.

//.

Teorem $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Bevis:

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2$$

$$= \left(\|u\| + \|v\|\right)^2$$

$$\Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad //$$

Def: For $u, v \in V$, $u, v \neq 0$, defineres vinkelen $\theta = \angle(u,v)$ ved

$$\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} \in [-1,1]$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

dvs. $\theta = \arccos\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}\right)$.

<u>Prop</u>: For alle $v, w \in V$ gjelder:

(i) $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\left(\|v\|^2 + \|w\|^2\right)$

(ii) $\langle v,w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$

6.2 Eksempler på indreprodukt

Eks: Skalarproduktet på $\mathbb{R}^n$:

Hvis $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n)$

$\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n)$

er $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Spørsmål: Hvilke andre indreprodukt på $\mathbb{R}^n$ fins det?

Flere eksempler:

Hvis $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, er

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i$$

et indreprodukt.

<u>Lemma</u> La A være en symmetrisk $n \times n$ matrise, og la $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ være egenvektorer til A med $A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$,

hvor $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Da er

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0.$$

<u>Bevis</u>: $\lambda_1 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$

$$= (A\vec{v}_1) \cdot \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \cdot (A^T \vec{v}_2)$$

$$= \vec{v}_1 \cdot (A\vec{v}_2) = \vec{v}_1 \cdot (\lambda_2 \vec{v}_2)$$

$$= \lambda_2 (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot (\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0. \quad //$$

Lemma: La $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$, $\vec{v}_i \neq 0$, og $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = 0$ for $i \neq j$. Da er $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ lineært uavhengige

Bevis: Anta

$$a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n = 0,$$

hvor $a_i \in \mathbb{R}$. For alle i er

$$a_i \|\vec{v}_i\|^2 = \vec{v}_i \cdot (a_1\vec{v}_1 + \dots + a_n\vec{v}_n)$$

$= 0$

$\Rightarrow \quad a_i = 0. \quad //.$

$\vec{v}_i \neq 0$