Teorem For en avbildning

$$m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

er følgende ekvivalent:

(i) Avbildningen m er en isometri og $m(0) = 0$.

(ii) $m(x) \cdot m(y) = x \cdot y$ for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Det finns en ortogonal $n \times n$

matrise A slik at for alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$m(x) = Ax.$$

<u>Bevis</u>: (i) $\Rightarrow$ (ii):

For alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ er:

$$\|m(x) - m(y)\| = \|x - y\|.$$

For $y = 0$: $\quad \|m(x)\| = \|x\|.$

$$(x-y)\cdot(x-y) = x\cdot x - 2x\cdot y + y\cdot y$$

$$x\cdot y = \frac{1}{2}\left(\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|m(x)-m(y)\|^2 - \|m(x)\|^2 - \|m(y)\|^2 \right)$$

$$= m(x)\cdot m(y).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): La $\{e_1, \dots, e_n\}$ være standardbasis for $\mathbb{R}^n$.

La A være $n \times n$ matrisen med søyler $m(e_1), \dots, m(e_n)$.

Av (ii) følger at A er ortogonal.

La

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$f(x) = A^{-1} m(x).$$

Da er
$$f(e_i) = e_i.$$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,$

$$f(x)\cdot f(y) = A^{-1}m(x)\cdot A^{-1}m(y)$$
$$= m(x)\cdot m(y)$$
$$= x\cdot y.$$

La $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Da er
$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Vi kan skrive
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} t_i e_i, \qquad t_i \in \mathbb{R},$$

$$t_i = f(x) \cdot e_i = f(x) \cdot f(e_i)$$

$$= x \cdot e_i = x_i$$

$\Rightarrow$ $f(x) = x$ för alla x

$$\begin{array}{c} f(x) \\ \| \\ A^{-1}m(x) \end{array}$$

$\Rightarrow$ $m(x) = Ax$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Vist tidligen.

//

<u>Teorem</u> Enhver isometri $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan uttrykkes på formen

$$m(x) = Ax + v,$$

hvor A er en ortogonal $n \times n$ matrise og $v \in \mathbb{R}^n$.

B<u>evis</u>: La $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$T(x) = m(x) - m(0).$$

Da er T en isometri og $T(0) = 0$, så det finnes en ortogonal matrise A slik at

$$T(x) = Ax.$$

$$\Rightarrow \quad m(x) = T(x) + m(0)$$

$$= Ax + \underbrace{m(0)}_{v}. \qquad //$$

<u>Merk</u>: A og v er entydig bestemt av m:

$$v = m(0)$$

$$Ax = m(x) - m(0).$$

<u>Husk</u>: A ortogonal $\Rightarrow$ $\det(A) = \pm 1$

<u>Def</u>: En isometri $m(x) = Ax + v$ kalles

* <u>orienteringsbevarende</u>
  dersom $\det(A) = 1$,
* <u>orienteringsreverserende</u>,
  dersom $\det(A) = -1$.

Prop Enhver isometri $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er bijektiv. Den inverse avbildningen $m^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er også en isometri.

Bevis "Bijektiv" betyr at det for hver $y \in \mathbb{R}^n$ finnes nøyaktig én $x \in \mathbb{R}^n$ slik at $m(x) = y$.

La

$$m(x) = Ax + v.$$

Da er

$$Ax + v = y \iff x = A^{-1}(y-v).$$

Altså er m bijektiv, og

$$m^{-1}(y) = A^{-1}y - A^{-1}v.$$

Siden A^{-1} er ortogonal, er m^{-1} en isometri. (Dette følger også direkte av definisjonen av "isometri". //

Prop Hvis $m_1, m_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er isometrier, så er også

$$m_1 \circ m_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

en isometri.

Bevis: Opplagt. //

Merk: Hvis

$$m_1(x) = A_1 x + v_1,$$

$$m_2(x) = A_2 x + v_2,$$

så er

$$m_1(m_2(x)) = A_1(A_2 x + v_2) + v_1$$

$$= A_1 A_2 x + A_1 v_2 + v_1$$

Rotasjon av planet om origo

$\mathbb{C} = \{a+bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$,

$i^2 = -1$.

Det komplekse plan $\mathbb{C}$ kan identifiseres med $\mathbb{R}^2$ som reelt vektorrom.

Standardbasis for $\mathbb{C}$: $\{1, i\}$

Gitt $a+bi \in \mathbb{C}$, så er

$T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $T(z) = (a+bi)z$

en lineær avbildning. Vi bestemmer matrisen til T:

$T(1) = a+bi$

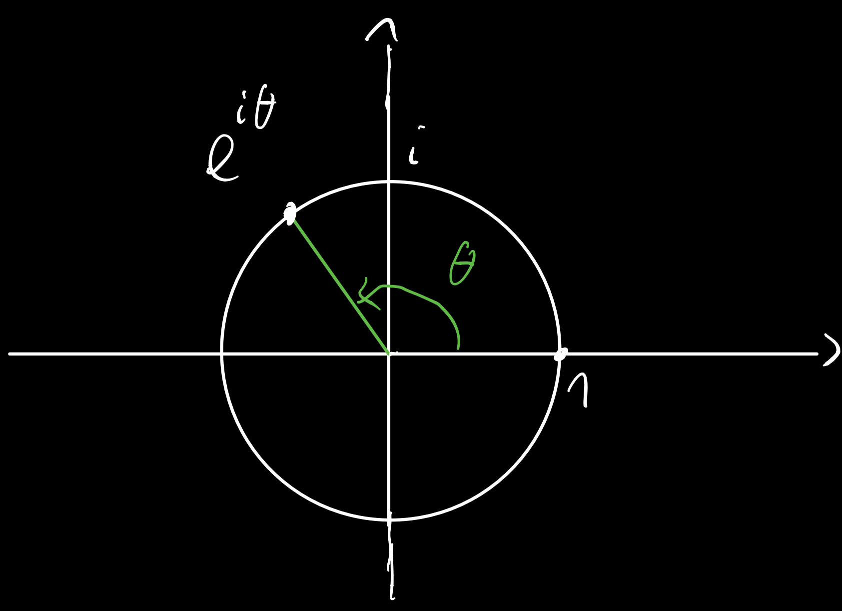
$T(i) = (a+bi)i = -b+ai$

$\Rightarrow T$ har matrisen $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$,

relativ til standardbasis $\{1, i\}$.

<u>Eksponensialavbildning:</u> For $\theta \in \mathbb{R}$ definerer vi

$$e^{i\theta} := \cos\theta + i\cdot\sin\theta$$



Husk: $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

for alle $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Polarkoordinater: Ethvert komplekst tall z kan skrives som

$$z = re^{i\theta}$$

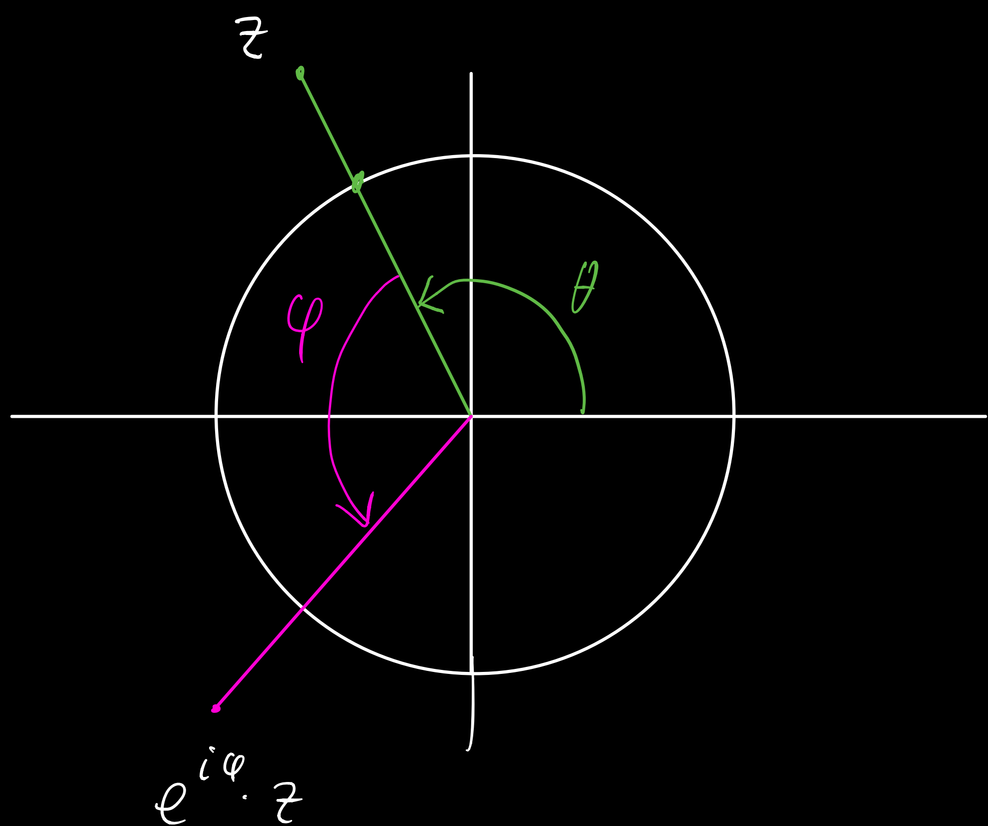
hvor $r \geq 0$, $\theta \in \mathbb{R}$. Hvis $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, betyr dette at

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

Merk: $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

For $\varphi \in \mathbb{R}$ er

$$e^{i\varphi} \cdot z = e^{i\varphi} \cdot r e^{i\theta}$$
$$= r e^{i(\varphi+\theta)}$$



$\Rightarrow$ $e^{i\varphi} z$ er resultatet av å rotere z en vinkel φ om origo.

Def: La $\theta \in \mathbb{R}$. Avbildningen

$$R_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad R_\theta(z) = e^{i\theta} \cdot z$$

kalles rotasjon om origo med vinkel θ.

Merk: R_θ har matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Husk: $e^{i(\theta + 2\pi)} = e^{i\theta}$

Eks:

(i) $R_{2\pi} = R_0$ har matrise $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) R_{π} : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$R_{\pi}(z) = -z$$

(iii) $R_{\frac{\pi}{2}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) $R_{\frac{\pi}{3}}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(v) $R_{\frac{\pi}{4}}$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

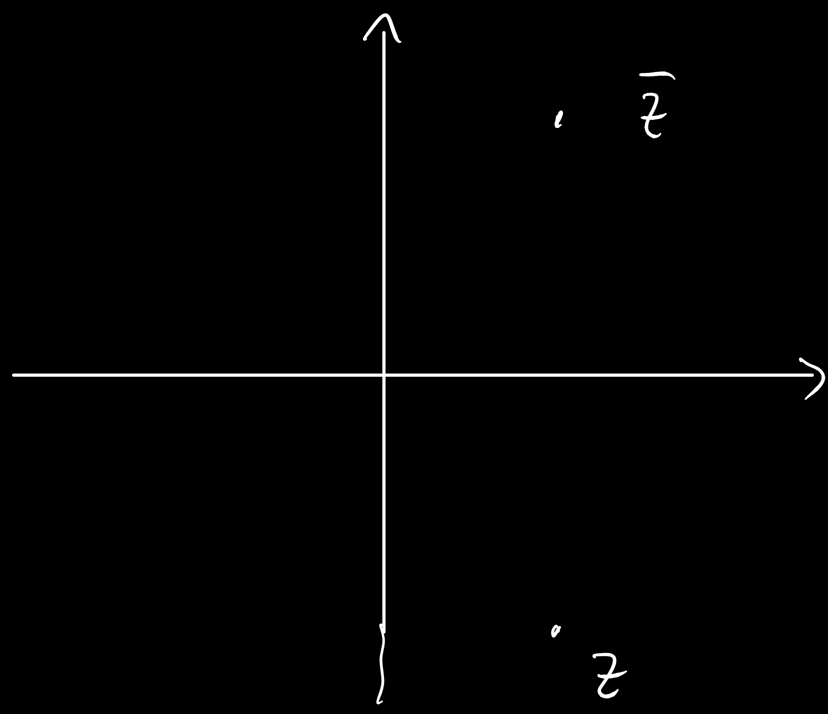
(vi) $R_{\frac{\pi}{6}}$ $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

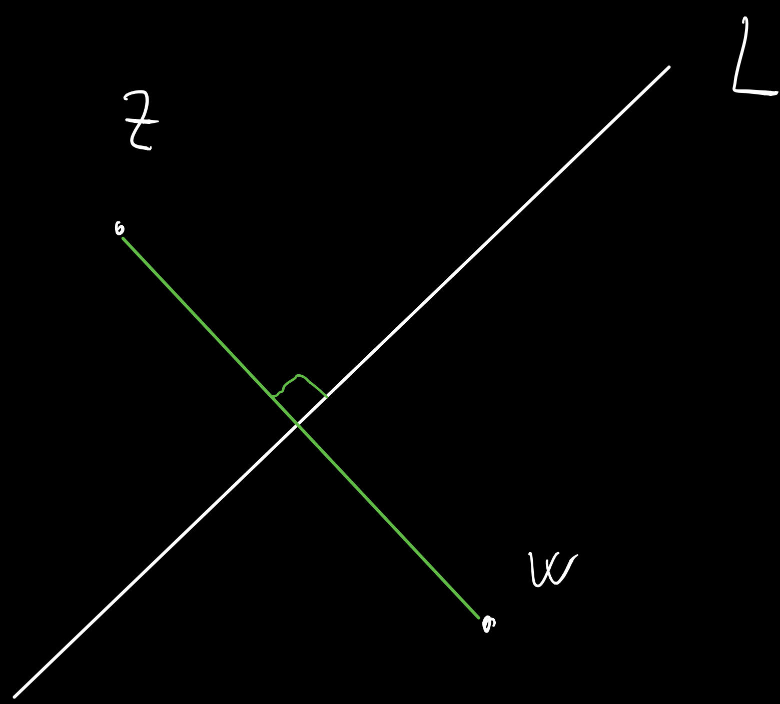
Speilinger av planet
i en linje gjennom origo

<u>Husk</u>: $\overline{a+bi} = a - bi$

: komplekse konjugasjon

= speiling om x-aksen.





w = speilingen av z i linjen L.

Gitt $a, b \in \mathbb{R}$ la

$$T : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$
$$T(z) = (a+bi) \cdot \bar{z}$$

Vi finner matrisen til T:

$$T(1) = a+bi$$
$$T(i) = (a+bi)(-i)$$
$$= b - ai$$

$\Rightarrow$ T har matrisen $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

Def: For $\theta \in \mathbb{R}$ la

$$S_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C},$$

$$S_\theta(z) = e^{i\theta} \cdot \bar{z}.$$

Merk: S_θ har matrisen

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Prop: S_θ er speilingen i linjen gjennom 0 og $e^{i\theta/2}$.

Bevis: La $w = e^{i\theta/2}$.

$$S_\theta(w) = e^{i\theta} \cdot e^{-i\theta/2}$$

$$= e^{i(\theta - \frac{\theta}{2})} = e^{i\theta/2} = w$$

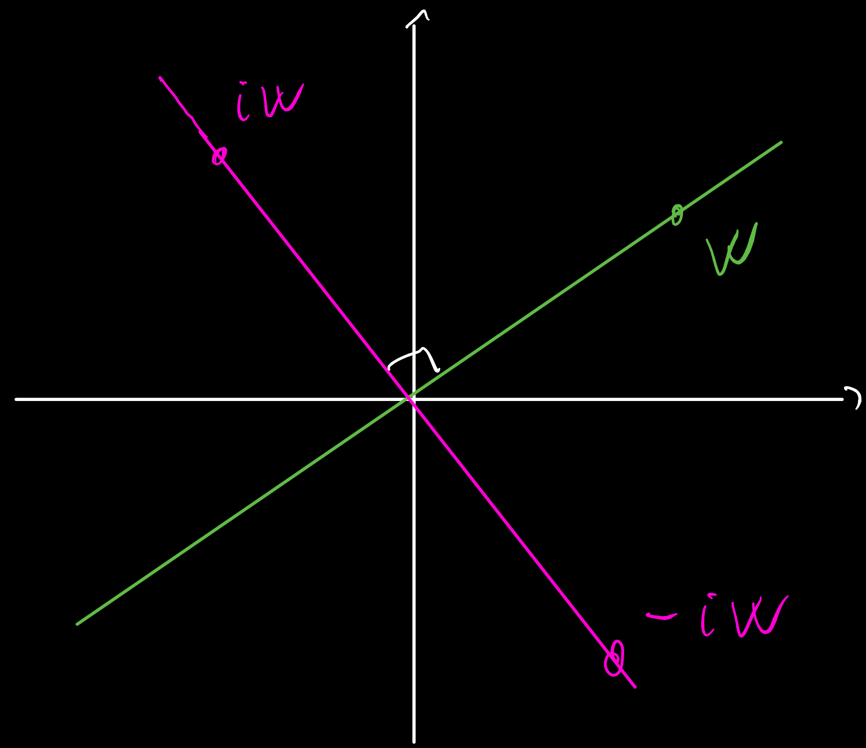
$$S_\theta(iw) = e^{i\theta} \cdot \overline{iw}$$

$$= e^{i\theta} \cdot \bar{i} \cdot \bar{w}$$

$$= -i e^{i\theta} \bar{w}$$

$$= -i S_\theta(w)$$

$$= -iw$$



//.

Prop La $\theta, \eta \in \mathbb{R}$.

(i) $R_\theta \circ R_\eta = R_{\theta+\eta}$

(ii) $S_\theta \circ R_\eta = S_{\theta+\eta}$

(iii) $R_\theta \circ S_\theta = S_{\theta-\eta}$

(iv) $S_\theta \circ S_\eta = R_{\theta-\eta}$.

Bevis: (i) Vist allerede.

(ii) $S_\theta(R_\eta(z)) = e^{i\theta} \cdot \overline{e^{i\eta} z}$

$$= e^{i\theta} e^{-i\eta} \bar{z}$$

$$= e^{i(\theta-\eta)} \cdot \bar{z}$$

$$= S_{\theta-\eta}(z)$$

(iii) Lignende.

(iv) $S_\theta(S_\eta(z))$

$$= e^{i\theta} \cdot \overline{e^{i\eta} \bar{z}}$$

$$= e^{i\theta} e^{-i\eta} z$$

$$= e^{i(\theta-\eta)} z$$

$$= R_{\theta-\eta}(z). \quad //$$

Vi har brukt følgende regneregler:

$$\overline{wz} = \bar{w}\,\bar{z} \qquad \text{for alle } w, z \in \mathbb{C}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

$$= \overline{e^{i\theta}}$$