Mer om indreprodukt på $\mathbb{R}^n$

Spektralteoremet

La A være en symmetrisk $n \times n$ matrise. Da har $\mathbb{R}^n$ en ortonormert basis som består av egenvektorer for A.

Bevis for $n=2$: La

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

hvor a, b, d er reelle tall.

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot\lambda + \det(A)$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - b^2$$

Egenverdier for A:

$$\lambda = \frac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2}}{2}$$

$$(a+d)^2 - 4(ad-b^2)$$
$$= a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4b^2$$
$$= a^2 - 2ad + d^2 + 4b^2$$
$$= (a-d)^2 + 4b^2$$
$$\geq 0$$

$\Rightarrow$ A har kun reelle egenverdier.

Tilfelle 1: $a = d$, $b = 0$.

Da er
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI$$

$\Rightarrow Av = av$ for alle $v \in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ Standardbasisen $\{e_1, e_2\}$ er en ortonormert basis av egenvektorer for A.

Tilfelle 2: $a \neq d$ eller $b \neq 0$.

Da har A to forskjellige egenverdier λ_1, λ_2 med egenvektorer v_1, v_2. Siden $v_1 \cdot v_2 = 0$ (ifølge tidligere lemma), er

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\}$$

en ortonormert basis av egenvektorer for A. //

<u>Def</u>: En symmetrisk matrise A kalles <u>positiv definitt</u> dersom alle egenverdiene for A er positive.

Teorem La A være en positiv definitt symmetrisk $n \times n$ matrise. Da er

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_A = \vec{x} \cdot (A\vec{y})$$

$$= \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$$

et indreprodukt på $\mathbb{R}^n$, og ethvert indreprodukt på $\mathbb{R}^n$ kan uttrykkes på denne formen.

Bevis: (i) La A være en pos. def. symmetrisk $n \times n$ matrise.

Vi sjekker at $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ oppfyller aksiomene for et indreprodukt.

<u>Bilinearitet:</u>

$$\langle s\vec{x} + t\vec{y}, \vec{z} \rangle_A = (s\vec{x} + t\vec{y}) \cdot A\vec{z}$$

$$= s(\vec{x} \cdot A\vec{z}) + t(\vec{y} \cdot A\vec{z})$$

$$= s\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + t\langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$$

Tilsvarende:

$$\langle \vec{x}, s\vec{y} + t\vec{z} \rangle = s\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + t\langle \vec{x}, \vec{z} \rangle.$$

<u>Symmetri:</u> $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle_A = \vec{y} \cdot (A\vec{x})$

$$= \vec{y} \cdot (A^T \vec{x}) = A\vec{y} \cdot \vec{x}$$

$$= \vec{x} \cdot A\vec{y} = (\vec{x}, \vec{y})_A .$$

Positivitet: La $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ være en ortonormert basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A, hvor

$$A\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i , \quad \lambda_i > 0.$$

Hvis $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i \vec{v}_i , \quad t_i \in \mathbb{R},$

er

$$A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i A\vec{v}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} t_i \lambda_i \vec{v}_i .$$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_A = \vec{x} \cdot A\vec{x}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \vec{v}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} t_j \lambda_j \vec{v}_j \right)$$

$$= \sum_{i,j} t_i t_j \lambda_j \left(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j \right)$$

$$= \sum_{i} t_i^2 \lambda_i \left(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \right)$$

$$= \sum_{i} t_i^2 \lambda_i \qquad \lambda_i > 0$$

Hvis $\vec{x} \neq 0$, er $t_i \neq 0$ for minst én i, og

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_A = \sum_i t_i^2 \lambda_i > 0.$$

(ii) La $\langle \cdot , \cdot \rangle$ være et vilkårlig indreprodukt på $\mathbb{R}^n$. La $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ være standardbasis for $\mathbb{R}^n$. Sett

$$a_{ij} = \langle \vec{e}_i , \vec{e}_j \rangle .$$

Da er $A = (a_{ij})$ en symmetrisk matrise, og

$$\langle \vec{e}_i , \vec{e}_j \rangle = \vec{e}_i \cdot A\vec{e}_j$$

Hvis $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$, $\vec{y} = \sum_{j=1}^{n} y_j \vec{e}_i$, er

$$\vec{x} \cdot A\vec{y} = \sum_{i,j} x_i y_j (\vec{e}_i \cdot A\vec{e}_j)$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

$$= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.$$

Det gjenstår å vise at A er positiv definitt. La $\vec{v}$ være en egenvektor for A med

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}.$$

$$0 < \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \vec{v} \cdot A\vec{v}$$

$$= \lambda \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{v})}$$

> 0

$\Rightarrow \lambda > 0.$ //

<u>Eks</u>: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

$\Rightarrow A$ har egenverdier

$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3.$

$$\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle_A = \vec{x} \cdot A\vec{x}$$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$$

$$= \sum_i a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

$$= 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 x_2$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2)$$

$$= x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2$$

$$> 0 \quad \text{hvis } \vec{x} \neq 0.$$

Def: $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ = vektorrommet av alle reelle $m \times n$ matriser.

Frobenius-indreproduktet på $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ er definert ved

$$\langle A, B \rangle_{m,n} = tr(A^T \cdot B)$$

for $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

<u>Merk</u>: Hvis $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, er

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

$$(A^T B)_{ik} = \sum_j a_{ji} b_{jk}$$

$$\langle A, B \rangle_{m,n} = \sum_k (A^T B)_{kk}$$

$$= \sum_{jk} a_{jk} b_{jk}$$

Hvis vi velger en rekkefølge på

elementene i en $m \times n$ matrise, f.eks.

$$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots a_{m1} \cdots a_{mn},$$

kan vi identifisere

$$M_{m \times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{mn}$$

som reelle vektorrom, og $\langle \cdot , \cdot \rangle_{m,n}$ svarer til skalar-produktet på $\mathbb{R}^{mn}$.

Eks $(m = n = 2)$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en ortonormert basis for $M_{2\times n}(\mathbb{R})$ som svarer til standardbasis for $\mathbb{R}^4$.

Def: For $a < b$ definerer vi

$C([a,b])$ = vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner $[a,b] \to \mathbb{R}$.

Prop: $\langle f,g\rangle_{L^2} = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$

er et indreprodukt på $C([a,b])$.

Bevis: Bilinearitet, symmetri: Opplagt.

Positivitet: La $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ være kontinuerlig.

$$\langle f,f\rangle_{L^2} = \int_a^b f(x)^2\,dx \geq 0$$

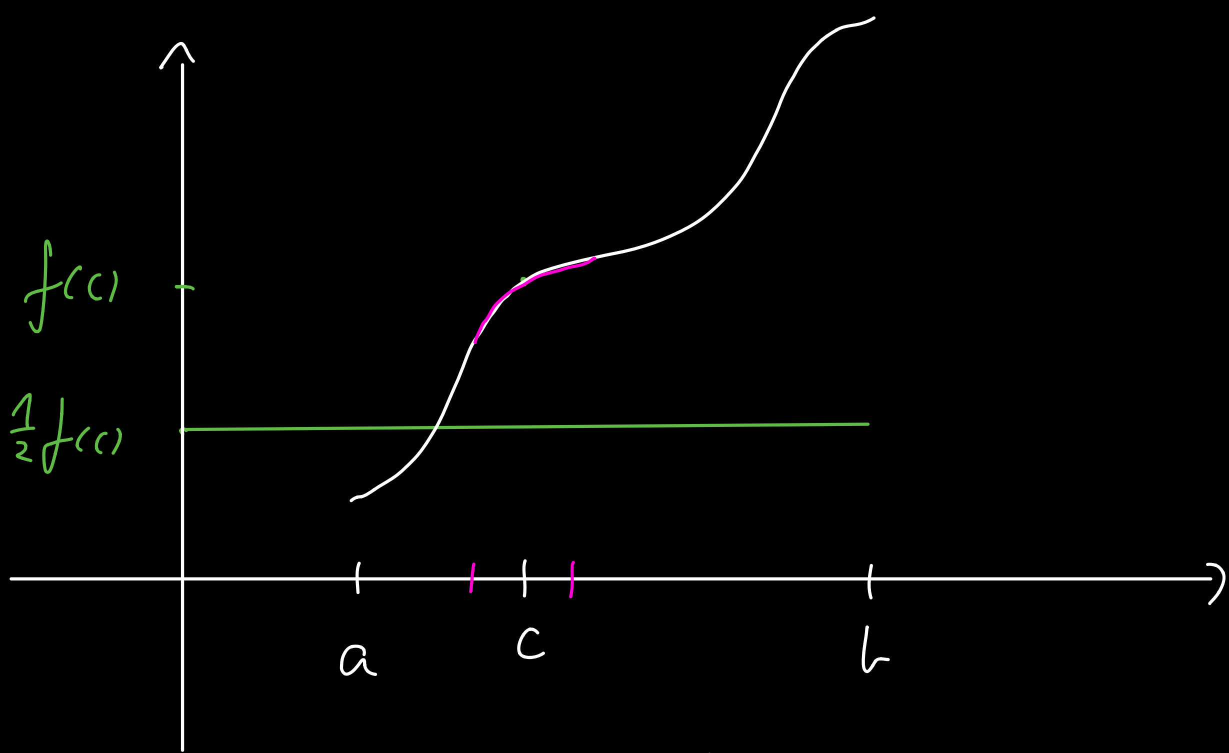
Anta $f \not\equiv 0$, dvs. det fins en $c\in[a,b]$ slik at $f(c)\neq 0$.

Anta først $a<c<b$.

Siden f er kontinuerlig, finns det en liten $\delta > 0$ slik at

$$|f(x)| > \frac{1}{2}|f(c)|$$

når $|x-c| < \delta$.



$$\int_a^b f(x)^2\,dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)^2\,dx$$

$$\geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{1}{4} |f(c)|^2 \, dx$$

$$= \frac{\delta}{2} |f(c)|^2$$

$$> 0.$$

Tilsvarende fungerer hvis
$c = a$ eller $c = b$. //