(Mest) REPETISJON

Egenverdier og ortogonale matriser

La A være en reell $n \times n$ matrise og $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ egenverdi for A

$\iff$ likningen $Av = \lambda v$ har en løsning $v \neq 0$

$\iff$ $\underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\chi_A(\lambda)} = 0$

A^T : den transponerte matrisen

Vi har $\det(A) = \det(A^T)$, og

A og A^T har de samme egenverdiene.

For en 2x2 matrise A:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - tr(A) \cdot \lambda + det(A)$$

For en 3x3 matrise A:

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A) \cdot \lambda^2 - \frac{1}{2}\left[tr(A)^2 - tr(A^2) \right] \cdot \lambda + det(A)$$

En $n \times n$ matrise A kalles <u>ortogonal</u> dersom $A^T \cdot A = I$. Da er $det(A) = \pm 1$.

En ortogonal matrise kan ikke ha andre reelle egenverdier enn ± 1.

En ortogonal 2x2 matrise $A \neq \pm I$ har <u>ingen</u> reelle egenverdier

Hvis A er en ortogonal 3×3 matrise,

så er $\lambda = \det(A)$ en egenverdi for A.

Isometrier og ortogonale matriser.

En avbildning $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kalles en

isometri dersom

$$\| m(P) - m(Q) \| = \| P - Q \|$$

for alle $P, Q \in \mathbb{R}^n$.

Vi har vist:

$m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometri

$\Longleftrightarrow$ Det fins en ortogonal matrise A

og en $v \in \mathbb{R}^n$ slik at

$$m(x) = Ax + v \quad \text{for alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Plangeometri

Vi har vist: En ortogonal 2×2 matrise er

enten en rotasjonsmatrise

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

eller en speilingsmatrise

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

En rot. matrise A har $\det(A) = 1$.

En speilingsmatrise A har $\det(A) = -1$,

$A^2 = I$, og egenverdier ± 1.

Klassifikasjon av isometrier i planet

Det er 4 typer isometrier i planet:

* Translasjoner
* Rotasjoner

$\Big\}$ orienteringsbevarende (dvs. $\det(A) = 1$)

* Speilinger
* Glidespeilinger

$\Big\}$ orienteringsreverserende ($\det(A) = -1$)

① Translasjoner: $T_u(x) = x + u$.

② Rotasjon om et punkt p:

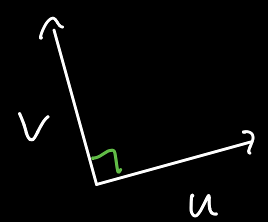
$$R(x) = p + A(x-p).$$

hvor A er en rotasjonsmatrise.

③ Speiling S om en linje

$$L = \{ p + tu \mid t \in \mathbb{R} \}$$

hvor $p, u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0$. La A være speilingmatrisen med $Au = u$.



$Av = -v$

Da er

$$S(x) = p + A(x-p).$$

Hvis $v \neq 0$ er en normalvektor til A, dvs. $u \cdot v = 0$, så er

$$A = I - \frac{2}{\|v\|^2} v v^T \quad \text{(Householder-matrise)}$$

Hvis $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, så er

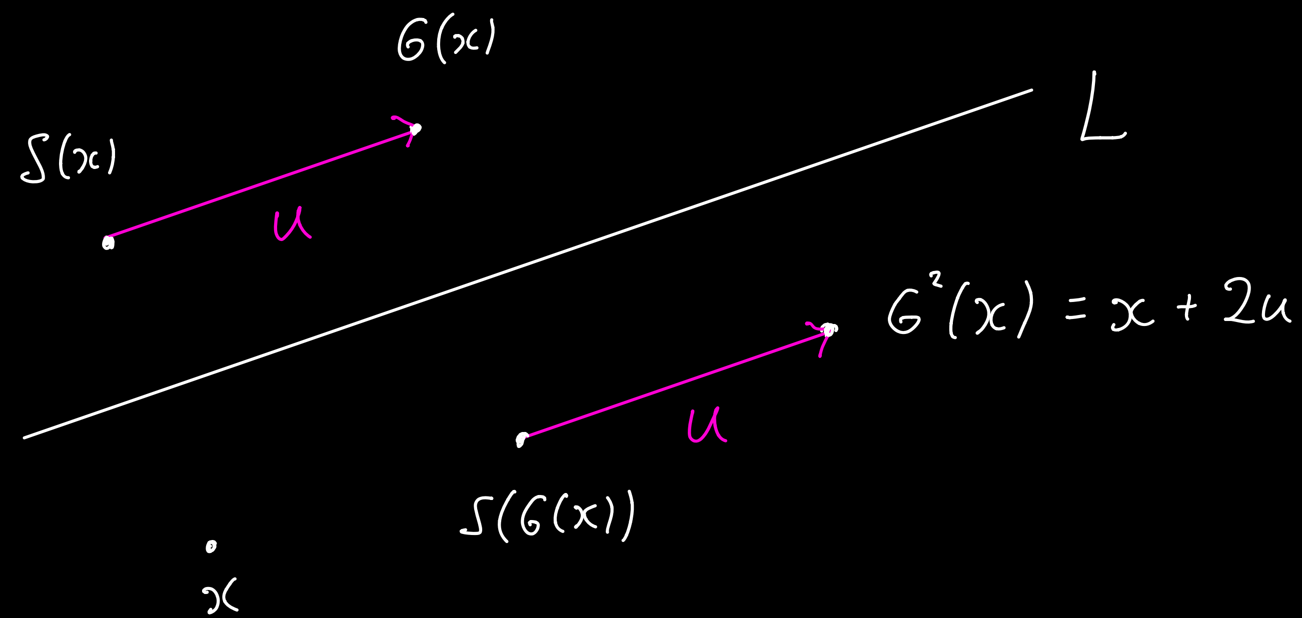
$$A = \frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \begin{pmatrix} v_2^2 - v_1^2 & -2v_1v_2 \\ -2v_1v_2 & v_1^2 - v_2^2 \end{pmatrix}.$$

(4) Glidespeiling G langs en linje L med translasjonsvektor $u \neq 0$:

$$G(x) = S(x) + u \qquad (S = \text{speilingen i } L)$$

$$= p + A(x-p) + u.$$

Mens $S^2(x) = S(S(x)) = x$, er



$$
\begin{aligned}
G^2(x) &= p + u + A\big(A(x-p) + u\big) \\
&= p + u + x - p + u \\
&= x + 2u.
\end{aligned}
$$

Hvilken isometri i planet?

La $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $m(x) = Ax + v$,

hva A er en ortogonal 2×2 matrise

og $v \in \mathbb{R}^2$.

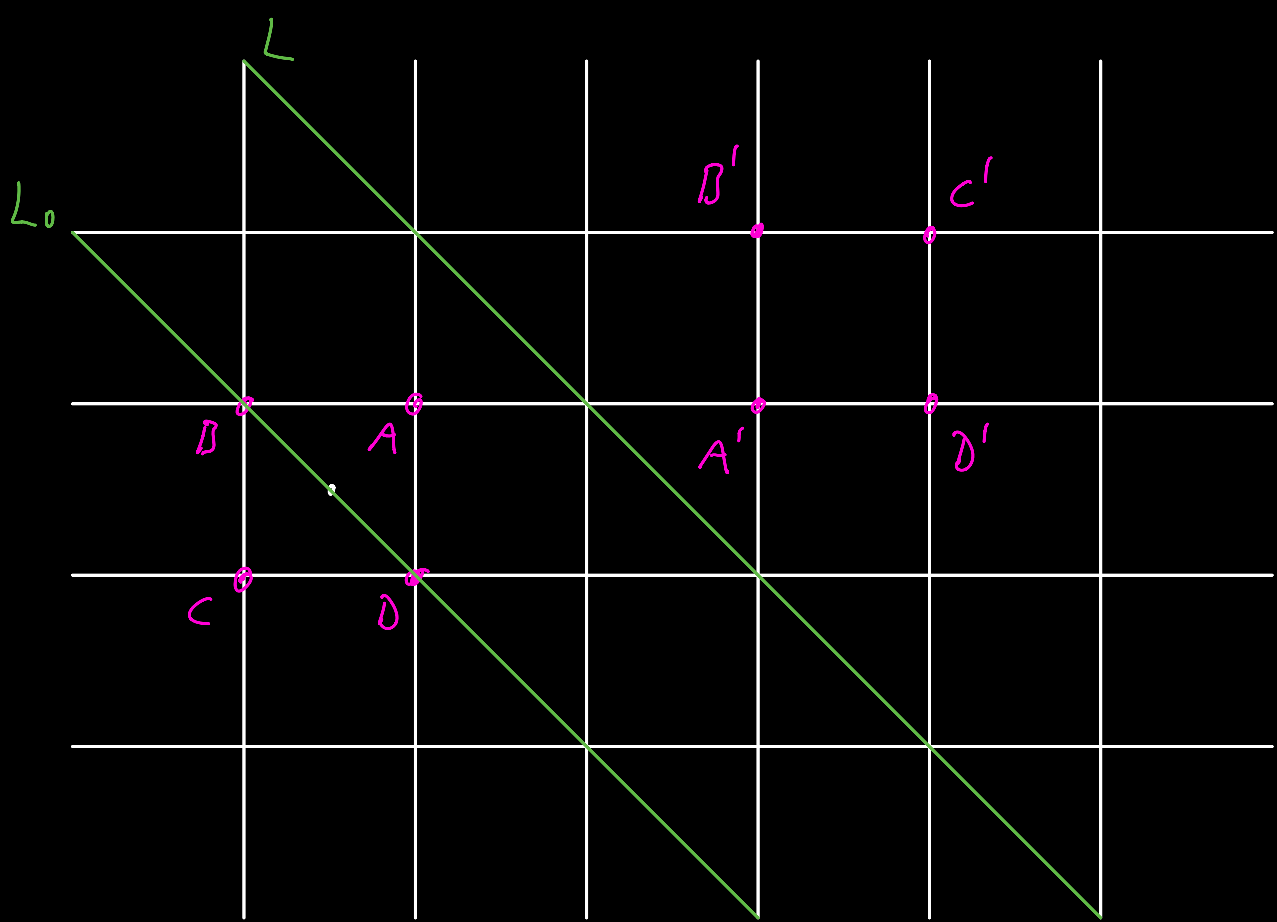
$$
\begin{tikzcd}
\boxed{A = I\,?} \arrow[r, "\text{Ja}"] \arrow[d, "\text{Nei}"] & \text{m er en translasjon} \\
\boxed{\det(A) = 1\,?} \arrow[r, "\text{Ja}"] \arrow[d, "\text{Nei}"] & \text{m er en rotasjon om et punkt.} \\
{}
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{m^2 = \mathrm{Id}\ ?}$ $\xrightarrow{\text{Ja}}$ m er en speiling i en linje

$\downarrow$ Nei

m er en glidespeiling langs en linje.

<u>Eks</u>: Symmetrier av et krystallmønster.



$A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$, $D = (1,-1)$.

La $m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vere isometrien gitt ved

$$m(A) = A' = (5,1)$$

$$m(B) = B' = (5,3)$$

$$m(C) = C' = (7,3)$$

$$m(D) = D' = (7,1).$$

L_0 = linja gjennom B og D, med normalvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

S_0 = speiling i L_0, $S_0(\vec{x}) = A\vec{x}$, hvor

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da er

$m(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{v}$, hvor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = -1$, så m er enten en speiling eller en glidespeiling.

$$m^2(\vec{x}) = A(A\vec{x} + \vec{v}) + \vec{v})$$
$$= \vec{x} + (A + I)\vec{v}$$

$$2\vec{u} = (A + I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ m er en glidespeiling langs en linje L.

Speilingen i L er gitt ved

$$S(\vec{x}) = m(\vec{x}) - \vec{u}$$

$$= A\vec{x} + \vec{v} - \vec{u}$$

$$\vec{v} - \vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$S\vec{x} = \vec{x} \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{aligned} -y + 4 &= x \\ -x + 4 &= y \end{aligned}$$

$$\iff x + y = 4$$

Isometrien m er altså glidespeilingen langs linja $x + y = 4$ med translasjonvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.