# 2.1 Grunnleggende om matriser

Husk: En reell $m \times n$ matrise

$A$ har formen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Vi skriver kort $A = (a_{ij})$

Def: Summen av to $m \times n$

matriser $A = (a_{ij})$ og

$B = (b_{ij})$ er gitt ved

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

<u>Eks</u>:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+4 & -1+7 \\ 3+0 & 0-2 \\ 1+3 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Eks: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ikke definert, da matrisene har forskjellig størrelse.

Def: Hvis $A = (a_{ij})$ er en reell $m \times n$ matrise og $c$ et helt tall, definerer

$$cA = (c a_{ij})$$

(skalarmultiplikasjon)

$(c=-1)$: $\quad -A := (-1)\cdot A$

<u>Eks:</u>

$$2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Def: 0-matrisen av størrelse $m \times n$ er matrisen hvor alle elementene er 0.

Eks: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

er 0-matrisen av størrelse $2 \times 3$.

**Prop:** For alle reelle $m \times n$ matriser $A, B, C$ og reelle tall $c, d$ gjelder:

(i) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(ii) $A+B = B+A$

(iii) $A+0 = A$

↳ null-matrisen av størrelse $m \times n$.

(iv) $A+(-A) = 0$

(v) $c(dA) = (cd)A$

(vi) $(c+d)A = cA + dA$

$c(A+B) = cA + cB$

(vii) $1 \cdot A = A$.

Bevis: Opplagt. //

Husk: Produktet av en $m \times n$

matrise $A = (a_{ij})$ og en

$n \times p$ matrise $B = (b_{jk})$ er

$m \times p$ matrisen $A \cdot B = (c_{ik})$

gitt ved

$$c_{ik} = \sum_j a_{ij} b_{jk}$$

Eks:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\underset{A}{\phantom{x}} \qquad \underset{B}{\phantom{x}}$$

$$\underset{B}{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2-3 & -2+3 \\ 2-3 & -2+3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Also: $A \cdot B = 0$,

$B \cdot A \neq 0$

**Prop:** For alle reelle matriser $A, B, C$ og reelle tall $d$ gjelder:

(i) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

så lenge alle produkter er vel-definert, dvs. hvis

$A$ er en $m \times n$ matrise.
$B$ " $n \times p$ "
$C$ " $p \times r$ ".

(ii) $(A+B)\cdot C = A\cdot C + B\cdot C$

$$A\cdot(B+C) = A\cdot B + A\cdot C$$

så lenge alle summer og produkter er definert.

(iii) $(dA)\cdot B = A\cdot(dB)$

$$= d(A\cdot B)$$

<u>Bevis av (i)</u>: La

$A=(a_{ij})$, $B=(b_{jk})$, $C=(c_{kl})$.

$$[(A\cdot B)\cdot C]_{il} = \sum_k (A\cdot B)_{ik}\cdot c_{kl}$$

$$= \sum_k \left( \sum_j a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl}$$

$$= \sum_{kl} (a_{ij} b_{jk})\, c_{kl}$$

$$= \sum_{kl} a_{ij} (b_{jk} c_{kl})$$

$$\vdots$$

$$= [A\cdot(B\cdot C)]_{il} \qquad //$$

## 2.2 Kvadratiske matriser

Def: Identitetsmatrisen $I_n$

er definert ved:

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Hvis $I_n = (a_{ij})$, er

$$a_{ij} = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

$$a_{ii} = 1 \quad \text{for alle } i.$$

Ofte skriver man bare

$$I = I_n.$$

Def: <u>Hoveddiagonalen</u> i en $n \times n$ matrise $A = (a_{ij})$ er elementene

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}.$$

<u>Eks</u>: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Hoveddiagonalen.

## Observasjon:

(i) $A \cdot I_n = A$ for enhver

$m \times n$ matrise $A$

(ii) $I_n \cdot A = A$ for enhver

$n \times p$ matrise $A$.

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

: øvre triangulær

↳ alt under hoveddiag. er 0.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad \text{nedre triangulær.}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{diagonal.}$$

Def: En $n \times n$ matrise $A = (a_{ij})$ kalles

* øvre triangulær, dersom alle elementene under

hoveddiagonalen er 0,

dvs. $a_{ij} = 0$ for $i > j$.

* <u>nedre triangulær</u> dersom

alle elementene over

hoveddiagonalen er 0,

dvs. $a_{ij} = 0$ for $i < j$.

* <u>diagonal</u>, dersom alle

elementene utenfor hoveddiagonalen

er 0, dvs. $a_{ij} = 0$ for $i \neq j$.

<u>Def</u>: En $n \times n$ matrise $A$ kalles <u>invertibel</u> dersom det finnes en $n \times n$ matrise $B$ slik at

$$A \cdot B = I_n = B \cdot A$$

<u>Merk</u>: Man kan vise at

$$A \cdot B = I_n \implies B \cdot A = I_n.$$

I så fall kalles $B$ den <u>inverse</u> matrisen til $A$ og man skriver $B = A^{-1}$.

<u>Lemma</u> For enhver invertibel matrise $A$ gjelder:

(i) Den inverse matrisen er entydig bestemt av $A$.

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$.

Bevis: (i) Anta $B$ og $C$ er to inverser til $A$, altså

$$A \cdot B = I = B \cdot A$$

$$A \cdot C = I = C \cdot A$$

Da er

$$C = C \cdot I = C \cdot (A \cdot B)$$

$$= (C \cdot A) \cdot B$$

$$= I \cdot B = B,$$

altså er $B = C$.

(ii) La $B = A^{-1}$. Da er

$$A \cdot B = I = B \cdot A,$$

så $(A^{-1})^{-1} = B^{-1} = A$. //

<u>Eks</u>: Hvis $a, b, c, d$ er

reelle tall, har vi

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ac+ca \\ bd-db & -bc+da \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

$$= (ad-bc) \cdot I_2$$

Hvis $ad-bc \neq 0$, er derfor

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Hvis $ad = bc$, er $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

<u>ikke</u> invertibel.

Def: $ad-bc$ kallas determinanten

till matrisen $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.