REPETISJON (fortsatt)

Klassifikasjon av punktsymmetrier i rommet

(se også forelesningen 18.3)

La $m: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $m(x) = Ax$,

hvor A er en ortogonal 3×3 matrise.

$$F_m = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid m(x) = x\}$$

Teorem

(i) Hvis $F_m = \mathbb{R}^3$, så er $m = Id$.

(ii) Hvis F_m er en linje, så er m en rotasjon om denne linja.

(iii) Hvis F_m er et plan, så er m speilingen i dette planet.

(iii) Hvis F_m består kun av origo, så er m en rotasjonsspeiling, dvs. en rotasjon om en akse $\mathbb{R}v$ etterfulgt av en speiling i normalplanet $v^{\perp}$.

Merk: $\mathbb{R}v$ kalles en <u>ekte rotasjonsakse</u>.

<u>Spesialtilfelle av rotasjonsspeiling</u>:

Inversjon = rot. speiling med vinkel π.

Da er $m(x) = -x$ for alle $x \in \mathbb{R}^3$

I dette tilfellet er den ekte rot. aksen ikke entydig bestemt.

Eks: $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

representerer en rot. speiling av z-aksen med vinkel θ.

Prøveeksamenssett nr. 2

Oppgave 1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left(0 - (-2)\right) + \left(0 - 2\right) + \left(-1 - 1\right)$$

$= 4 - 2 - 2 = 0.$

b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ lineært avhengige

$\iff \det(M) = 0.$

Søker reelle tall a_1, a_2, a_3, ikke alle 0,

slik at $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0.$

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = \begin{pmatrix} 2a_1 - a_2 + a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix}$$

Vi får $a_2 = a_1$

$$a_3 = a_2 - 2a_1 = -a_1$$

Vi velger $a_1 = 1$. Da blir $a_2 = 1$, $a_3 = -1$,

så

$$v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

c) Vi velger

$$v = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot i - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot j + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot k$$

$$= -2i - \left(-2 - (-1)\right) j + 3k$$

$$= -2i - (-1) j + 3k$$

$$= -2i + j + 3k$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2 A er en invertibel $n \times n$ matrise.

a) La $u \in \mathbb{R}^n$, $x = A^{-1}u$. Da er

$$Ax = A(A^{-1}u) = (AA^{-1})u = Iu = u.$$

b) La $\langle x, y \rangle = (Ax)^T(Ay) = Ax \cdot Ay$

$$\langle x, x \rangle = Ax \cdot Ax = \|Ax\|^2 \geq 0,$$

hvor $\|\cdot\|$ betegner den Euklidske normen.

$$\langle x, x \rangle = 0 \iff \|Ax\| = 0$$

$$\iff Ax = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{fordi } A \text{ er invertibel.}$$

c) Hvis A ikke er invertibel, så fins

en $x \neq 0$ slik at $Ax = 0$. Da blir

$\langle x, x \rangle = 0.$

<u>Oppgave 3</u>

$T(\vec{v}) = A\vec{v} + \vec{b}$, hvor

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

a) $T(\vec{v}) = \vec{v} \iff A\vec{v} + \vec{b} = \vec{v}$

$\iff (I - A)\vec{v} = \vec{b}$

$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\iff x + y = 1.$

Fikspunktmengden til T er linja $x + y = 1$,

altså er T speilingen i denne linja.

b) Fordi T er en speiling, er $T^2 = Id$.

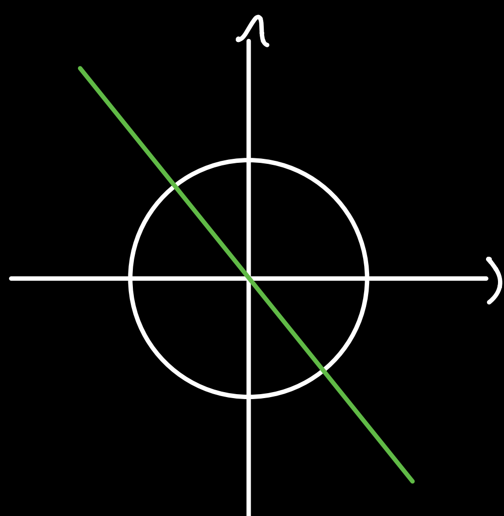
c) $T \neq Id$, $T^2 = Id \Rightarrow T$ har orden 2.

<u>Oppgave 4</u>

S = symmetrigruppa til en sirkel i planet med sentrum p.

a) S består av rotasjoner om p og speilinger i linjer gjennom p.

b) Vi betrakter enhetssirkelen om origo



La σ være speilingen i linja gjennom origo og $\vec{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Siden $\vec{v} = (\sin\theta, -\cos\theta)$ er en normalvektor til $\vec{u}$, er matrisen A til σ lik Householder-matrisen til $\vec{v}$:

$$A = \frac{1}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\cdot\cos\theta \\ 2\sin\theta\cdot\cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}}_{\text{rotasjon med vinkel } 2\theta} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{speiling i } x\text{-aksen.}}$$

c) La ρ = 90° rotasjon mot urviseren,

τ = speiling om x-aksen.

Da er $\rho, \tau \in S$.

ρ har matrise $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

τ har matrise $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da $AB \neq BA$, er $\rho\sigma \neq \sigma\rho$,

så S er ikke abelsk.