Mer om kvadratiske matriser

Husk: En $n \times n$ matrise kalles invertibel, dersom det finnes en $n \times n$ matrise B slik at

$$A \cdot B = I = B \cdot A$$

Eks:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 & 0 \\ 0 & by & 0 \\ 0 & 0 & cz \end{pmatrix}$$

Hvis $a, b, c \neq 0$, er derfor

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

Husk: Hvis x, y er reelle tall,

$x, y \neq 0$, så er

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}.$$

$$\Rightarrow \quad (xy)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$$

Lemma: Hvis A, B er invertible $n \times n$ matriser, så

er $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Merk: Man skriver ikke $\frac{1}{A}$.

Bevis: $A \cdot \underbrace{B \cdot B^{-1}}_{I} \cdot A^{-1}$

$= (A \cdot I) A^{-1} = A \cdot A^{-1}$

$= I$

$\Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. //

Husk:

transponere = bytte om rader og søyler.

Eks: $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Def: En kvadratisk matrise $A = (a_{ij})$ kalles symmetrisk dersom $A^T = A$, dvs.

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{for alle } i, j.$$

Lemma For alle reelle matriser

A, B og reelle tall c

gjelder:

(i) $(cA)^T = c \cdot A^T$

(ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$

dersom A og B har samme størrelse

(iii) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

når $A \cdot B$ er definert.

(iv) $(A^T)^T = A$

Bevis: Rett frem //.

Observasjon: Hvis

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

så er

$$\underbrace{v^T \cdot w}_{\text{matriseprodukt}} = \underbrace{v \cdot w}_{\text{skalarprodukt}}$$

Prop: Hvis A er en $m \times n$ matrise, så er

$$Av \cdot w = v \cdot A^T w \quad \left(\begin{array}{c}\text{skalar-}\\ \text{produkter}\end{array}\right)$$

for alle søylevektorer

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}.$$

Bevis:

$$\underbrace{Av \cdot w}_{\text{skalarprodukt}} = \underbrace{(Av)^T \cdot w}_{\text{matriseprod}}$$

$$= (v^T A^T) w = v^T (A^T w)$$

$= v \cdot A^T w$. //

Def: En kvadratisk matrix A kaldes ortogonal, dersom

$$A^T \cdot A = I.$$

Prop: Hvis A er en kvadratisk matrise med søyler $s_1, s_2, \dots, s_n$, så er følgende ekvivalent:

(i) A er ortogonal

(ii) A er invertibel og

$$A^{-1} = A^T$$

(iii) $$s_i \cdot s_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j. \\ 1 & \text{hvis } i = j. \end{cases}$$

Bevis: (i) $\Leftrightarrow$ (ii):

$$A \text{ ortogonal} \Leftrightarrow A^T \cdot A = I$$

$$\Leftrightarrow A^T \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{I} = A^{-1}$$

$\Leftrightarrow \quad A^T = A^{-1}.$

$(i) \Leftrightarrow (iii)$: $\quad A^T \cdot A = (c_{ij})$

c_{ij}

$= (i\text{-te rad av } A^T) \cdot (j\text{-te søyle av } A)$

$= (i\text{-te søyle av } A) \cdot (j\text{-te søyle av } A)$

$= s_i \cdot s_j$

$$A^T \cdot A = I \Leftrightarrow s_i \cdot s_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

//.

Observasjon

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} \cdot \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

= første søyle av A

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} \cdot \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

= andre søyle av A

Generelt: Hvis $A = (a_{ij})$

er en $m \times n$ matrise og

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$ 1 på j-te plass, 0 ellers

så er Ae_j = j-te søyle til A.

$$\Rightarrow \underbrace{e_i \cdot Ae_j}_{\text{skalarprodukt}} = a_{ij}$$

Eks: $\underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$= b = a_{21}$$

<u>Prop</u>: En $n \times n$ matrise A er ortogonal hvis og bare hvis

$$A\mathbf{v} \cdot A\mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

for alle n-vektorer $\mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Bevis: Vi oppfatter v, w som søylevektorer.

(i) Hvis A er ortogonal, har vi

$$Av \cdot Aw = v \cdot \underbrace{A^T A}_{I} w$$

$$= v \cdot w$$

(ii) Anta $Av \cdot Aw = v \cdot w$ alltid holder. Vi velger

$v = e_i, \quad w = e_j$:

$$(A^T A)_{ij} = e_i \cdot (A^T A e_j)$$

$$= Ae_i \cdot Ae_j$$

$$= e_i \cdot e_j$$

$$= \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad //$$

<u>Eksempler på ortogonale matriser</u>

Hvis θ er et reelt tall, så er

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$ ortogonal.

For $\theta = \frac{\pi}{2}$; $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

For $\theta = \pi$; $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

<u>$n=3$</u>, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Def: Normen til en vektor $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ er definert ved

$$\|v\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

Merk: $\|v\|^2 = v \cdot v$

Prop: Hvis A er en ortogonal $n \times n$ matrise, så er

$$\|Av\| = \|v\|$$

for alle v.

<u>Bevis</u>:

$$\|Av\|^2 = Av \cdot Av$$

$$= v \cdot v$$

$$= \|v\|^2$$

$$\Rightarrow \|Av\| = \|v\| \quad //.$$

Def: Hvis $0 \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

så kalles $n \times n$ matrisen

$$Q_v = I - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot vv^T$$

en Householder-transformasjon

Eks: $n = 2$

$$vv^T = \underset{2 \times 1}{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{1 \times 2}{\begin{pmatrix} v_1, v_2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_2 v_1 & v_2^2 \end{pmatrix}$$

Generelt: $(vv^T)_{ij} = v_i v_j$

Prop: Enhver Householder-transformasjon er symmetrisk og ortogonal.

Bevis: Symmetrisk:

$$(vv^T)^T = (v^T)^T \cdot v^T$$

$$= vv^T$$

$\Rightarrow$ vv^T symmetrisch.

$$(Q_v)^T = I^T - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot (vv^T)^T$$

$$= I - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot vv^T$$

$$= Q_v$$

$\Rightarrow$ Q_v symmetrisch.

Ortogonal :

$$Q_v^T \cdot Q_v = Q_v^2$$

$$= \left(I - \frac{2}{\|v\|^2} vv^T\right) \cdot \left(I - \frac{2}{\|v\|^2} vv^T\right)$$

$$= I - \frac{4}{\|v\|^2} vv^T + \frac{4}{\|v\|^4} v \underbrace{v^T v}_{\|v\|^2} v^T$$

$$= I \quad //$$