Litt om symmetriske grupper

Def: For $\sigma \in S_n$ definerer vi

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \pm 1.$$

Eks: $n = 3$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \frac{(1-3)(2-3)(2-1)}{(2-1)(3-1)(3-2)} = 1.$$

$$(i,j) = \quad (1,2) \quad (1,3) \quad (2,3)$$

Prop: For $\sigma, \tau \in S_n$ er

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau).$$

Altså er $\operatorname{sgn} : S_n \to C_2 = \{\pm 1\}$

en gruppehomomorfi.

<u>Bevis</u>: $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \prod_{i<j} \frac{\sigma\tau(j) - \sigma\tau(i)}{j-i}$

$$= \prod_{i<j} \frac{\sigma\tau(j) - \sigma\tau(i)}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j-i}$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau). \quad //$$

<u>Def</u>: En permutasjon $\sigma \in S_n$ kalles en <u>transposisjon</u> dersom det fins i, j med $i \neq j$ slik at

$$\sigma(i) = j, \quad \sigma(j) = i,$$

$$\sigma(k) = k \text{ for } k \notin \{i, j\}.$$

<u>Eks</u>: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ bytter om 2, 4.

<u>Prop</u>: Hvis $\sigma \in S_n$ er en transposisjon, så er $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

<u>Bevis</u>: (i) La $\rho \in S_n$ være transposisjonen

som bytter om 1 og 2.

$$\frac{\rho(j)-\rho(i)}{j-i} = \begin{cases} \frac{1-2}{2-1} = -1 , & i=1,\ j=2 \\ \frac{j-2}{j-1} , & i=1,\ j\geq 3 \\ \frac{j-1}{j-2} , & i=2,\ j\geq 3 \\ \frac{j-i}{j-i} = 1 , & i\geq 3 \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(\rho) = -\prod_{j=3}^{n} \frac{j-2}{j-1} \cdot \frac{j-1}{j-2} = -1.$$

(ii) La σ være transposisjonen som

bytter om i og j. Velg en $\tau \in S_n$

med $\tau(i) = 1$, $\tau(j) = 2$. Da er

$\rho = \tau\sigma\tau^{-1}$ som i punkt (i), og

$$\sigma = \tau^{-1} \rho \tau, \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)^{-1} \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\tau)$$

$$= \operatorname{sgn}(\rho) = -1. \quad //$$

<u>Prop</u>: Ethvert element i S_n kan skrives som et produkt av transposisjoner.

<u>Eks</u>: $n=4$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\tau_1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}} \underset{\sigma}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\tau_2}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \underset{\tau_3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\tau_2 \tau_1 \sigma = \tau_3 \implies \sigma = \tau_1 \tau_2 \tau_3$$

$$\implies \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^3 = -1.$$

Def: En permutasjon $\sigma \in S_n$ kalles

* jevn dersom $\text{sgn}(\sigma) = 1$,
* odde dersom $\text{sgn}(\sigma) = -1$.

Def: Den alternerende gruppa A_n er definert ved

$$A_n := \text{kjernen til } \text{sgn} : S_n \to C_2$$
$$= \text{gruppa av jevne permutasjoner av } \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Prop: $|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

Bevis: For å definere en $\sigma \in S_n$ kan vi velge verdiene $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ suksessivt.

For $\sigma(1)$ har vi n muligheter: $\{1, \cdots, n\}$.

For $\sigma(2)$ har vi $n-1$ muligheter: $\{1, \cdots, n\} - \{\sigma(1)\}$

For $\sigma(3)$ har vi $n-2$ muligheter

$\vdots$

For $\sigma(n)$ har vi 1 muligheter.

Tilsammen gir det $n \cdot (n-1)(n-2) \cdots 1 = n!$ muligheter. //.

<u>Prop</u>: $|A_n| = \frac{n!}{2}$ for $n \geq 2$.

<u>Bevis</u>: Fordi $\mathrm{sgn} : S_n \to C_2$ er en surjektiv gruppehomomorfi, er

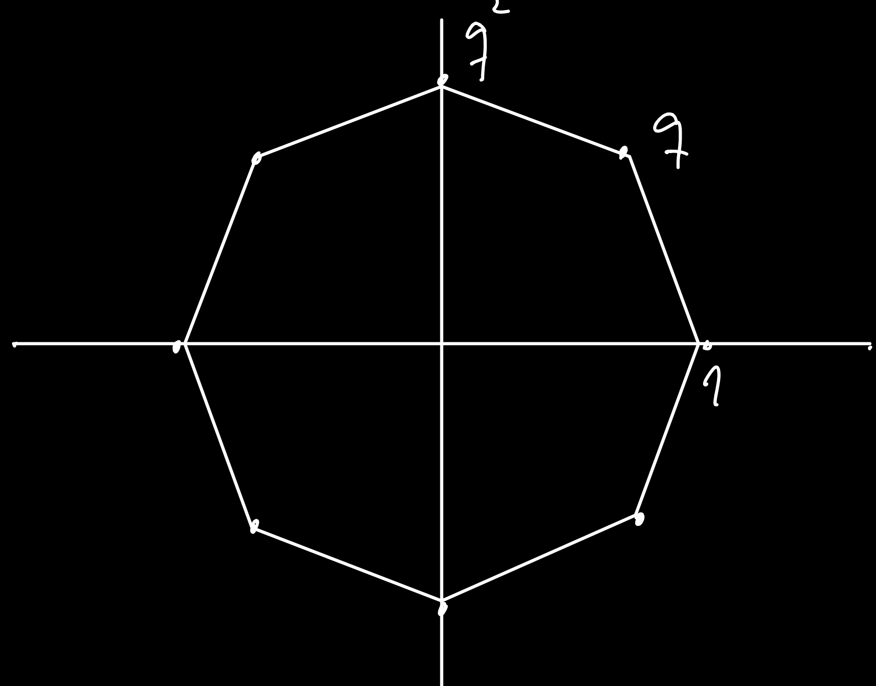
$$|S_n| = |\ker(\mathrm{sgn})| \cdot |C_2|$$
$$= |A_n| \cdot 2$$

$$\Rightarrow |A_n| = \frac{1}{2}|S_n| = \frac{n!}{2}. \quad //$$

<u>Def</u>: For $n \geq 3$ er diedergruppa D_n definert som symmetrigruppa til et regulært polygon i $\mathbb{R}^2$ med n kanter.

Vi kan velge polygonet i $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ med hjørner

$$\{1, q, q^2, \dots, q^{n-1}\}, \text{ hvor } q = e^{2\pi i/n}.$$



$n = 8$

ρ = rotasjonen om origo med vinkel $\frac{2\pi}{n}$

μ = speilingen om x-aksen

Som mengde er

$$D_n = \{ Id, \rho, \dots, \rho^{n-1}, \mu, \mu\rho, \dots, \mu\rho^{n-1} \}$$

$$\Rightarrow |D_n| = 2n.$$

Som for D_4 finner vi generelt at

$$\mu\rho = \rho^{-1}\mu,$$

og D_n har presentasjonen

$$D_n = \langle \rho, \mu \mid \rho^n = \mu^2 = Id, \ \mu\rho = \rho^{-1}\mu \rangle.$$

7.3 Den ortogonale gruppa $O(3)$

Def: En symmetri av en delmengde $F \subset \mathbb{R}^n$ er en isometri $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ slik at

$$m(F) = F.$$

$\mathrm{Sym}(F)$ = gruppa av alle symmetrier av F.

$\mathrm{Sym}_0(F)$ = gruppa av alle orienteringsbevarende symmetrier av F.

$$\underset{\text{undergruppe}}{\subset} \mathrm{Sym}(F).$$

Def: En delmengde $F \subset \mathbb{R}^n$ kalles begrenset dersom det fins en konstant $M > 0$ slik at $\|x\| \leq M$ for alle $x \in F$.

<u>Teorem</u>: Hvis $F \subset \mathbb{R}^n$ er en begrenset mengde, så har $\mathrm{Sym}(F)$ et fikspunkt $p \in \mathbb{R}^n$, dvs. $m(p) = p$ for alle $m \in \mathrm{Sym}(F)$.

<u>Bevis</u>: Utelatt.