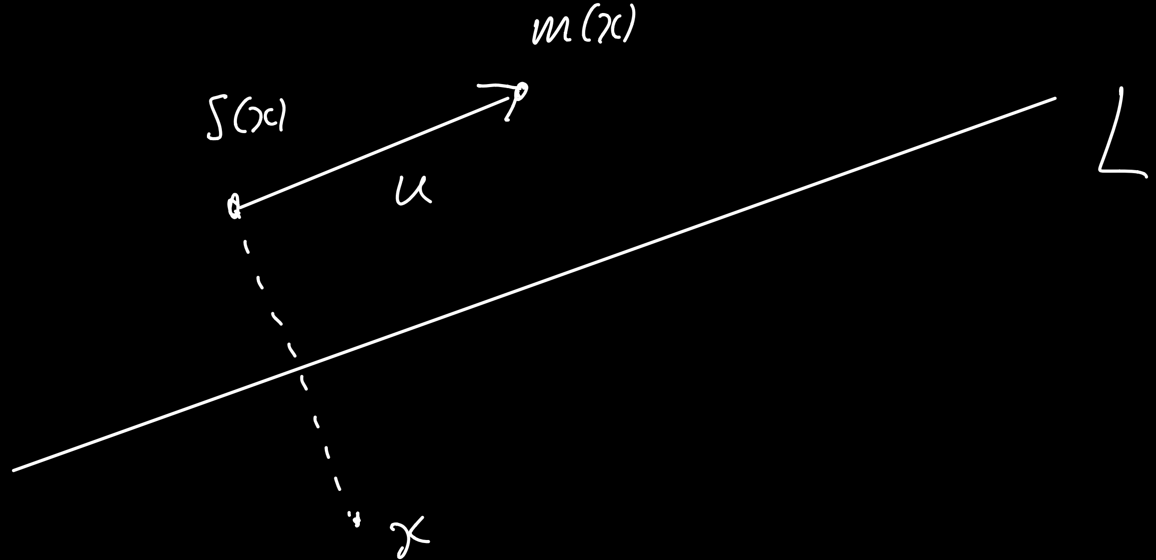
<u>Def</u> La $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være speilingen i en linje L, og $u \neq 0$ en vektor parallell med L.

Operasjonen $m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$m(x) = S(x) + u$$

kalles da en <u>glidespeiling</u> langs L.



Eks: $m\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$

Glidespeiling langs x-aksen

Her er $S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Def: La $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en avbildning. Et punkt $x \in \mathbb{R}^n$ kalles et fikspunkt for m dersom

$$m(x) = x.$$

$F_m :=$ mengden av fikspunkter.

Klassifikasjon av stive bevegelser i planet.

Teorem: Enhver ikke-triviell isometri $m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er av nøyaktig én av følgende typer:

(i) Translasjon, med $F_m = \emptyset$.
(den tomme mengde)

(ii) Rotasjon om et punkt p,
med $F_m = \{p\}$.

(iii) Speiling om en linje L,
med $F_m = L$.

(iv) Glidespeiling langs en linje L,
med $F_m = \emptyset$.

<u>Bevis</u>: La $m(x) = Ax + b$,
hvor A er en ortogonal 2×2 matrise
og $b \in \mathbb{R}^2$.

Tilfelle 1: $A = I$. Da er
$m(x) = x + b$: Translasjon

<u>Tilfelle 2</u> $A \neq I$, $\det(A) = 1$.
Da er 1 ikke en egenverdi for A,
så $A - I$ er invertibel.
Ser etter et fikspunkt for m:

$$Ax + b = x \iff x = -(A-I)^{-1} \cdot b.$$

Altså har m nøyaktig ett fikspunkt, nemlig

$$p = -(A-I)^{-1} \cdot b.$$

$$\begin{aligned} p + A(x-p) &= Ax + p - Ap \\ &= Ax + b \\ &= m(x). \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ m er en rotasjon om p.

<u>Tilfelle 3</u> $\det(A) = -1$.

Da har A egenverdier ± 1.

Velg egenvektorer u, v med

$$Au = u, \quad Av = -v.$$

Da er $\{u, v\}$ en basis for $\mathbb{R}^2$, kan vi skrive

$$b = su + tv, \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

La $p := \frac{t}{2} \cdot v$. Vi finner at

$$p + A(x - p) + su$$

$$= \frac{t}{2} \cdot v + Ax + \frac{t}{2} \cdot v + su$$

$$= Ax + su + tv$$

$$= Ax + b$$

$$= m(x)$$

$\Rightarrow$ Hvis $s = 0$, er m en speiling i linjen $L = \{p + su \mid s \in \mathbb{R}\}$, ellers er m en glidespeiling langs L. //.

<u>Def</u>: En isometri $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sies å ha <u>endelig orden</u> dersom det fins en $k \geq 1$ slik at

$$m^k = Id.$$

Den minste slike k kalles da <u>ordenen til m</u>.

<u>Her</u>: $m^k = m \circ m \circ \cdots \circ m$ (k ganger)

$m^3(x) = m(m(m(x)))$

Id = identitetsavb. : $Id(x) = x$.

Eks: * En speiling har orden 2.

* Rotasjonen $R_{2\pi/k}$ har orden k $(k \geq 1)$.

* Hvis θ er et irrasjonalt tall, så har R_θ ikke endelig orden.

Prop: Hvis $m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har orden k og $m(x) = Ax + b$, så er

$$A^k = I.$$

Bevis: $m^2(x) = A(Ax + b) + b$

$$= A^2x + Ab + b$$

$$\vdots$$

$$m^k(x) = A^k x + \sum_{i=0}^{k-1} A^i b$$

Altså: $m^k = Id$

$$\Updownarrow$$

$$A^k = I \text{ og } \sum_{i=0}^{k-1} A^i b = 0. \quad //.$$

4.3 Symmetrier av plane figurer

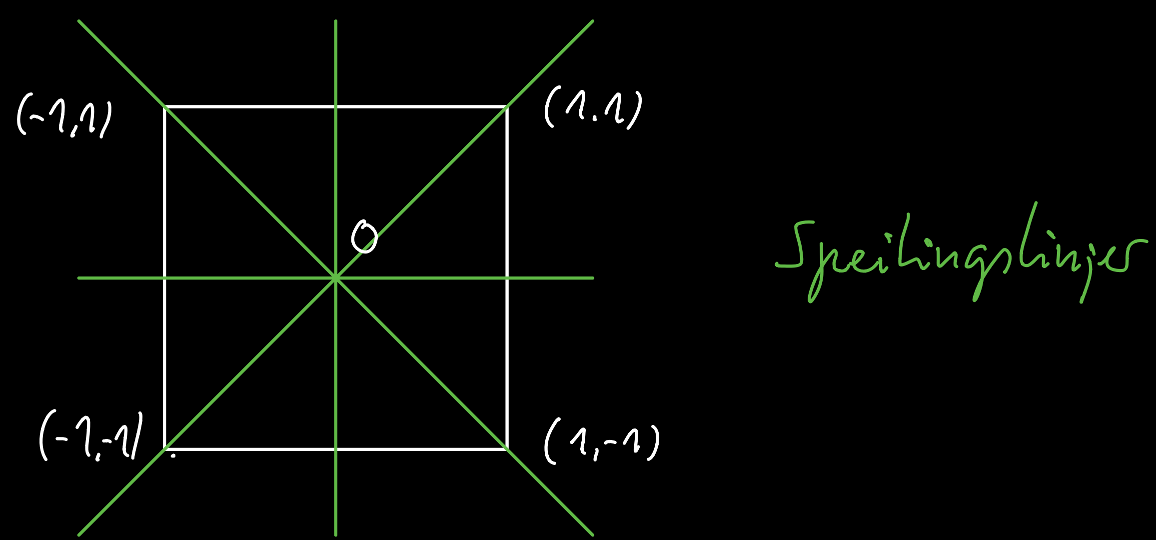
<u>Def</u>: La $F \subset \mathbb{R}^2$ være en delmengde. En <u>symmetri</u> av F er en isometri $m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at $m(F) = F$.

$\left(m(F) = \{ m(x) \mid x \in F \} \right)$

$\mathrm{Sym}(F) :=$ mengden av alle symmetrier av F

: <u>symmetrigruppa</u> til F

<u>Eks</u>: $F =$ kvadrat i $\mathbb{R}^2$.



$\mathrm{Sym}(F)$ består av 8 elementer:

* Rotasjoner om 0 med vinkel

  $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}.$

* Speilinger om

  x-aksen,

  y-aksen,

  linjen $x = y$,

  " $x = -y$.

Def: (i) $E(n) :=$ mengden av alle isometrier $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$

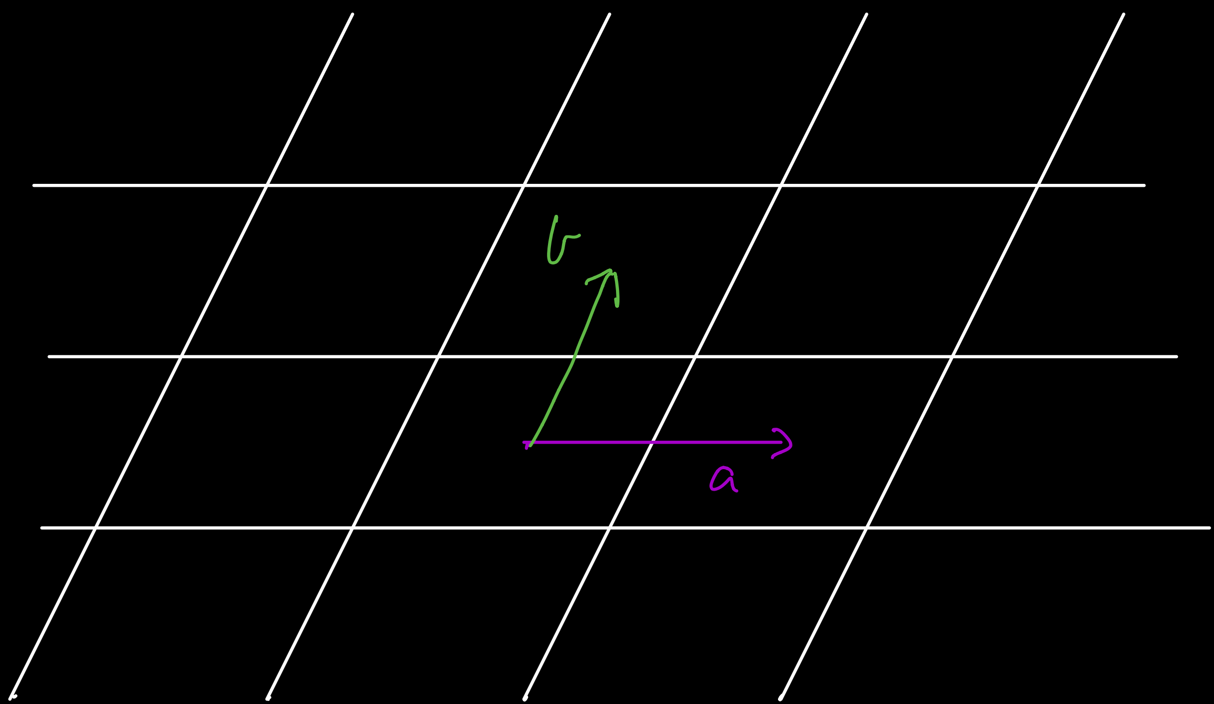
kalles den Euklidske gruppa i dim. n.

(ii) En ikke-tom delmengde $G \subset E(n)$ kalles en <u>undergruppe</u> av $E(n)$ dersom følgende holder for alle $g, h \in G$:

$$g^{-1} \in G, \qquad g \circ h \in G.$$

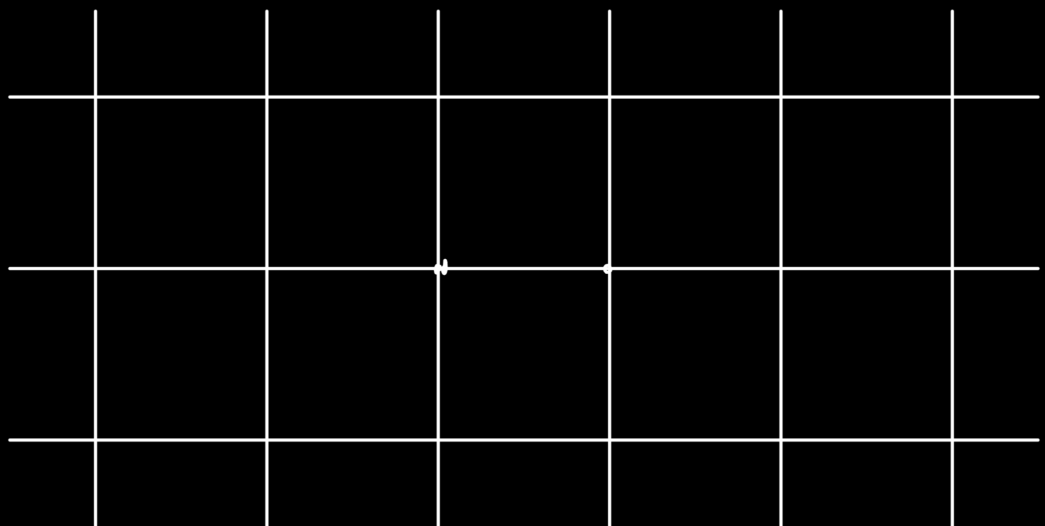
<u>Eks</u>: For $F \subset \mathbb{R}^n$ er $\mathrm{Sym}(F)$ en undergruppe av $E(n)$.

4.4 Plane krystaller



Symmetrier: T_{ma+nb}, $m, n \in \mathbb{Z}$

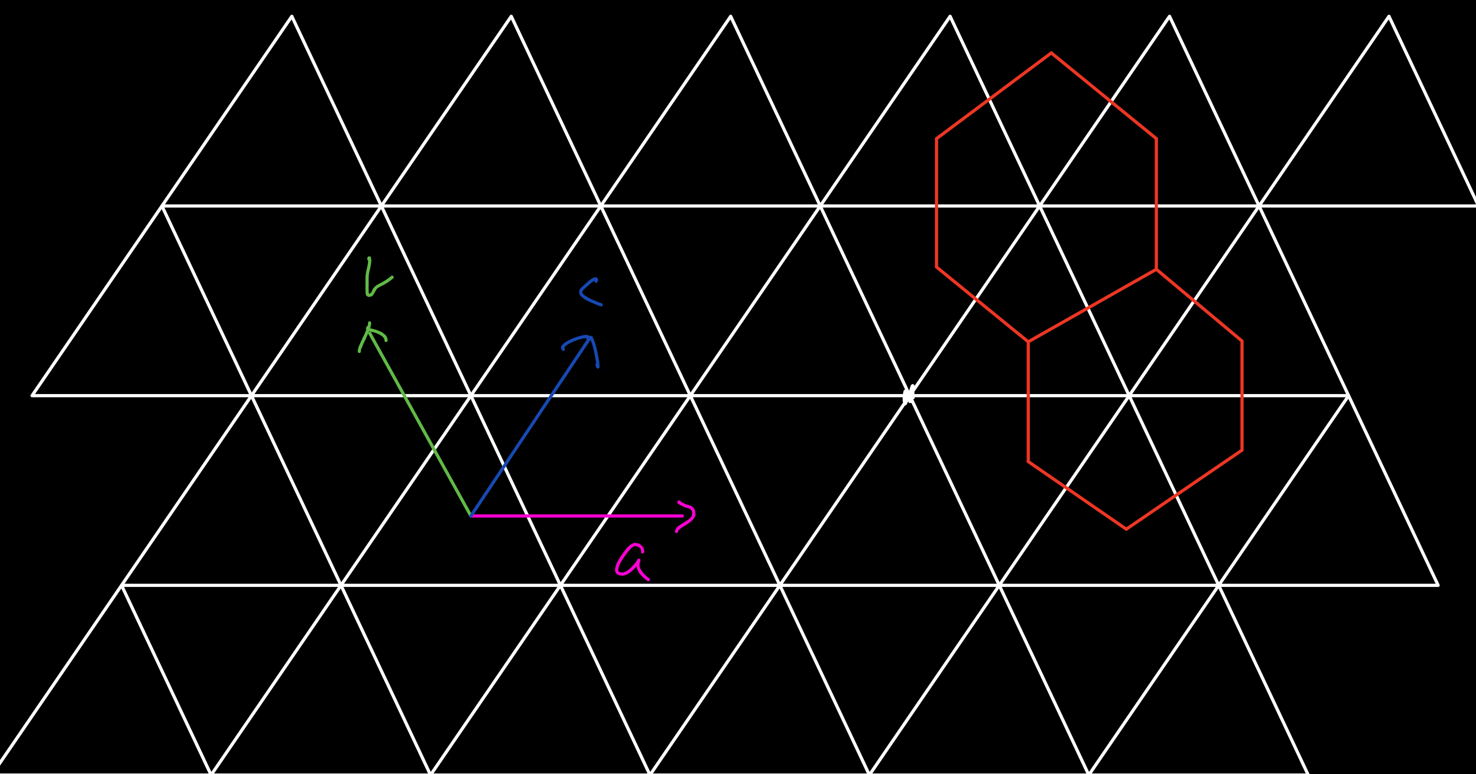
180° rotasjoner.



Symmetrier:

Rotasjoner av orden 2,4

(Glide)speilinger, translasjoner.



$c = a + b$

Translasjonssymmetrier:

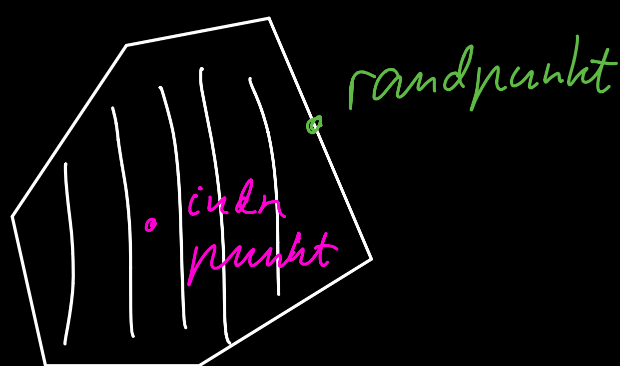
T_{ma+nb}, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Rotasjoner av orden 2, 3, 6.

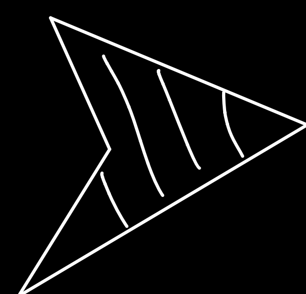
Speilinger, glidespeilinger.

<u>Def</u>: Et <u>polytop</u> i $\mathbb{R}^2$ er et område begrenset av et polygon hvor alle innvendige vinkler er $< 180°$.

<u>Eks</u>:



Polytop



Ikke polytop

Def: En krystallstruktur i $\mathbb{R}^2$ er en samling $\mathcal{P}$ av polytoper (som vi kaller celler) slik at:

(i) Cellene dekker hele $\mathbb{R}^2$.

(ii) Hvis P_1 og P_2 er forskjellige celler, så inneholder $P_1 \cap P_2$ kun randpunkter fra P_1 og P_2.

(iii) Hvis P_1 og P_2 er celler, så fins det en isometri $m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at $m(P_1) = P_2$, og slik at m avbilder celler på celler (dvs. P celler

$\Rightarrow m(P)$ celler).