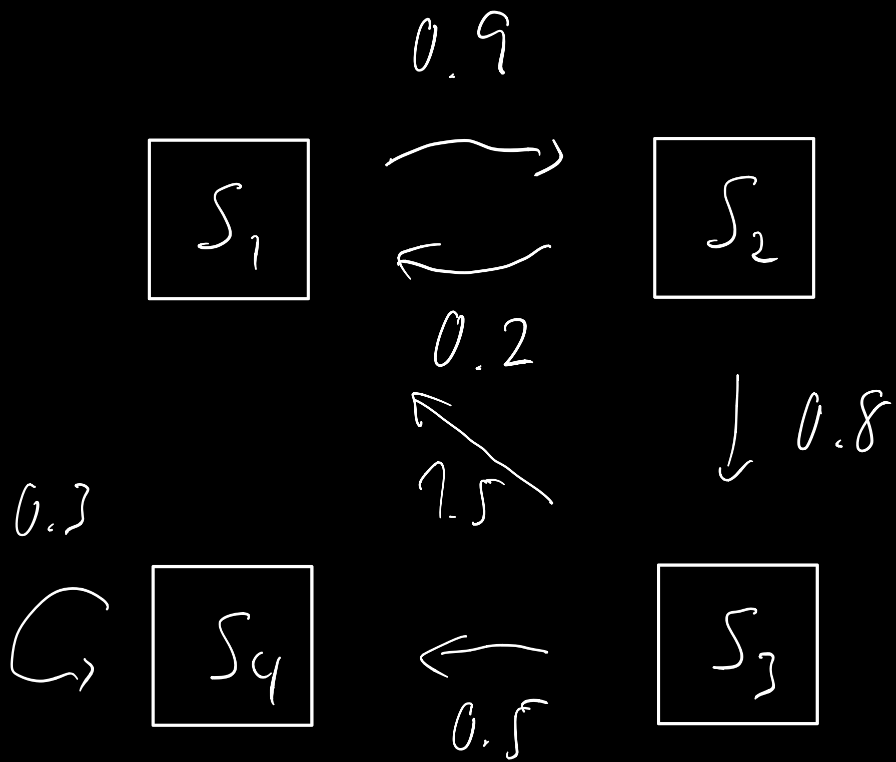
Inverse matriser og dynamiske systemer



S_1 = nyfødte $\qquad$ S_3 = voksne

S_2 = unge $\qquad$ S_4 = gamle

Overgangsmatrise:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 1.5 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$V_n = \begin{pmatrix} w_n \\ x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$: Tilstandsvektoren ved år n

$$V_{n+1} = A \cdot V_n$$

Den inverse matrisen A^{-1} beskriver

den <u>baklengse</u> utviklingen:

$$v_n = A^{-1}Av_n = A^{-1}v_{n+1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.3 & 0 \\ 0.67 & 0 & -0.17 & 0 \\ -1.1 & 0 & 0.28 & 3.3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd}
\boxed{S_1} \arrow[d, "-1.1"'] \arrow[dr, "0.67"] & \boxed{S_2} \arrow[l, "1.1"'] \\
\boxed{S_4} \arrow[loop left, "3.3"] & \boxed{S_3} \arrow[l, "0.28"] \arrow[u, "1.3"'] \arrow[loop right, "-0.17"]
\end{tikzcd}$$

2.3 Determinanter

Husk

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Def: Determinanten til en $n \times n$

matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er definert ved

$\det(A)$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\, a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

hvor

S_n = mengden av permutasjoner

av mengden $\{1, 2, \dots, n\}$,

$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ hvis σ er et produkt

av k transposisjoner

Transposisjon = ombytting av

to elementer

<u>Eks</u>

$$(1,2,3) \longrightarrow (1,3,2) \longrightarrow (3,1,2)$$

Permutasjonen σ som sender

$(1,2,3)$ på $(3,1,2)$ har

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = 1.$$

Eks:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31}$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Alternativ notasjon for determinanter

Hvis $A = (a_{ij})$, skriver vi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

<u>Prop</u> Hvis $A = (a_{ij})$ er en

$n \times n$ matrise, så er

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} a_{1j} \det(A_j),$$

hvor A_j er $(n-1) \times (n-1)$ matrisen som framkommer ved å stryke første rad og j-te søyle i A.

<u>Eks</u>: $n = 3$, $j = 2$

$$A = \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ -1 & \cancel{3} & 7 \\ 4 & \cancel{8} & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Eks:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(-3) - 2\,(3 \cdot 1 - 2 \cdot 4)$$

$$= 3 - 2 \cdot (-5) = 13.$$

Teorem Hvis A og B er

$n \times n$ matriser, så gjelder

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

//.

Prop: Hvis A' fremkommer ved

å multiplisere én av søylene

(eller én av radene) i A

med et reelt tall c, så er

$$\det(A') = c \cdot \det(A).$$

<u>Bevis</u> Opplagt fra definisjonen. //

<u>Prop</u>: $\det(cA) = c^n \cdot \det(A)$

hvis A er en $n \times n$ matrise.

<u>Prop</u> $\det(A^T) = \det(A).$

//

Prop: Bytter vi om på to rader eller to søyler i en $n \times n$ matrise, skifter determinanten fortegn

Eks:
$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = cb - ad$$
$$= -(ad - bc)$$

Prop: Hvis A er invertibel, så er $\det(A) \neq 0$, og

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Bevis: $\det(A) \cdot \det(A^{-1})$

$= \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I)$

$= 1.$ //

<u>Teorem</u>: For en kvadratisk matrise A gjelder:

A invertibel $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$. //

<u>Prop</u>: Determinanten til en triangulær matrise er produktet av elementene på diagonalen.

<u>Eks</u>:
$$\begin{vmatrix} 3 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot (-4) = -24.$$

<u>Def</u>: Determinanten til en ortogonal matrix er ± 1.

<u>Bevis</u>: Hvis $A^T \cdot A = I$, er

$$1 = \det(I) = \det(A^T) \cdot \det(A)$$

$$= \det(A)^2$$

$$\Rightarrow \det(A) = \pm 1. \quad //$$

2.3 Lineær likningssystemer

Problem: Løs likningssystemet

$$2x - 3y = -1$$

$$-x + y = 1. \qquad \cdot 2$$

(Første likning) + 2 (annen likning)

gir: $-y = 1$, $y = -1$.

$$x = y - 1 = -2.$$

Alternativ metode:

Likningssystemet kan skrives som

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi fant tidligere:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

dersom $ad \neq bc$.

Det gir:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2-3}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$