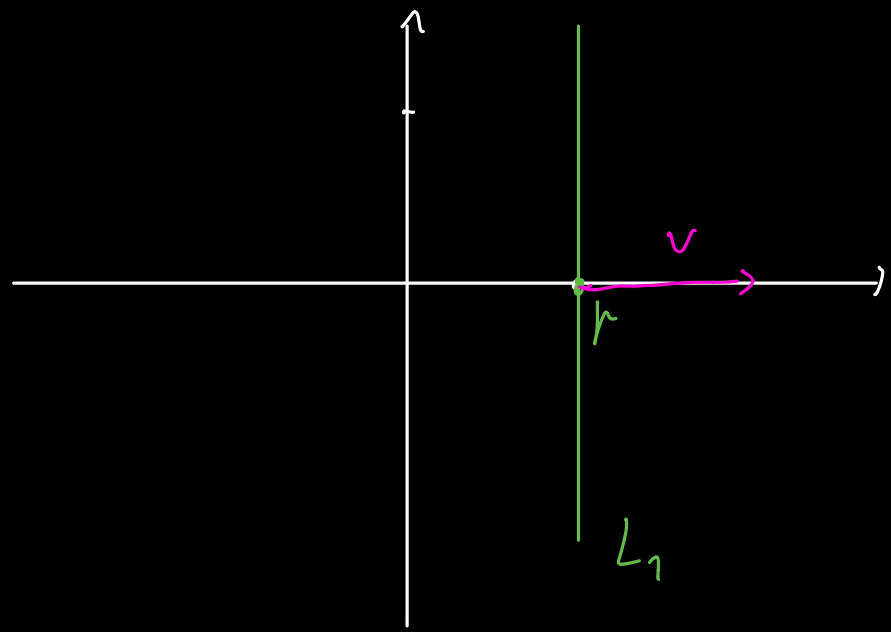
Prøveeksamenssett nr. 3 (fortsatt)

Oppgave 2 a) L_1 = linja $x = 1$.



$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A = Householder-matrisen Q_v

$$= \frac{1}{\|v\|^2} \begin{pmatrix} v_2^2 - v_1^2 & -2v_1v_2 \\ -2v_1v_2 & v_1^2 - v_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1(x) = p + A(x-p)$$
$$= Ax + (I-A)p$$

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b = (I-A)p = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S_1(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

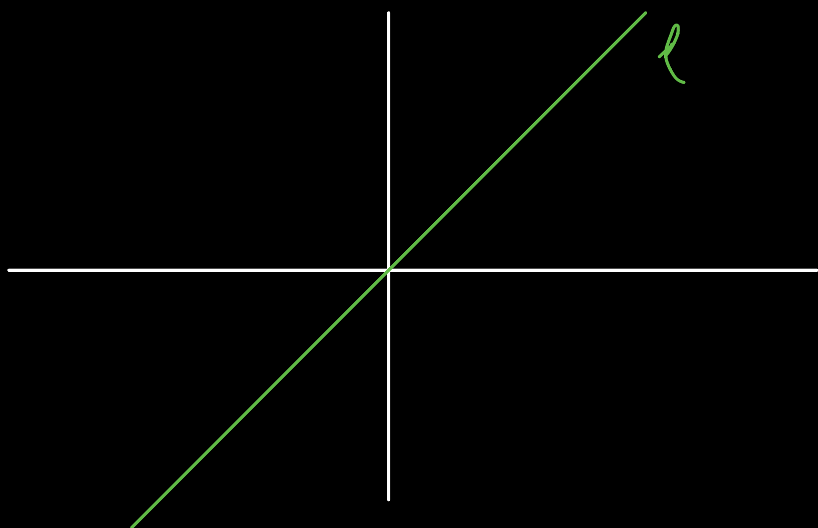
b) $S_1 m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = S_1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_1 m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = S_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$S_1 m\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $S_1 m(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}$, altså

$S_2 = S_1 m =$ speilingen i linja $x = y$.



Oppgave 3

a) La M være en ortogonal matrise.

Da er

$$M^2 = I \iff M^2 = M^T M \iff M = M^T$$

b) $Q_v = I - \frac{2}{\|v\|^2} v v^T$

j'te søjle i $vv^T = v_j \cdot v$

For $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ blir $vv^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$Q_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \cancel{\frac{2}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Q_v^2 = I$: Vist i forelesningen.

c) $\chi_{Q_v}(\lambda) = \det(Q_v - \lambda I)$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\left[\lambda^2(\lambda-1) - (\lambda-1) \right]$$

$$= (\lambda-1)(1-\lambda^2)$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-1)^2$$

$\Rightarrow$ Q_v har egenverdier ± 1.

d) Vist i forelesningen.

Oppgave 4 $\mathcal{B} = \{\cos^2 x,\ \sin^2 x,\ \cos x \cdot \sin x\}$

a)

$$D \cos^2 x = -2 \cos x \cdot \sin x$$

$$D \sin^2 x = \cos x \cdot \sin x$$

$$D(\cos x \cdot \sin x) = -\sin^2 x - \cos^2 x$$

b) D har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

D^2 har matrisen

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$D^2(\cos x \cdot \sin x) = -4 \cos x \cdot \sin x$$

$$D^{2n}(\cos x \cdot \sin x) = (-4)^n \cos x \cdot \sin x$$

$$D^{2n+1}(\cos x \cdot \sin x) = (-4)^n (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$\Rightarrow D^k \neq \mathrm{Id}$ for alle $k \geq 1$

$\Rightarrow D$ har uendelig orden.

c) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$g(x) = \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x.$

$$\langle f(x), g(x) \rangle = f(0)\cdot g(0) + f\left(\tfrac{\pi}{6}\right) g\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + f\left(\tfrac{\pi}{3}\right) g\left(\tfrac{\pi}{3}\right)$$

$$= 1 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 0.$$

d) $\cos^2 0 = 1, \quad \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}, \quad \sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$

$$\langle \cos^2 x, \cos^2 x \rangle = 1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{10}{16} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$$

$$\| \cos^2 x \| = \sqrt{\frac{13}{8}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{2}}}}.$$

Oppgave 5

a) Rotasjonssymmetrier:

180° rotasjon om et hjørne, midtpunktet på en side, eller midtpunktet i en firkant.

Speilingssymmetrier:

Speiling i ei linje i K eller i ei linje som er parallell med ei linje i K og som halverer de firkantene den snitter.

b) Generatorer for translasjonssymmetriene:

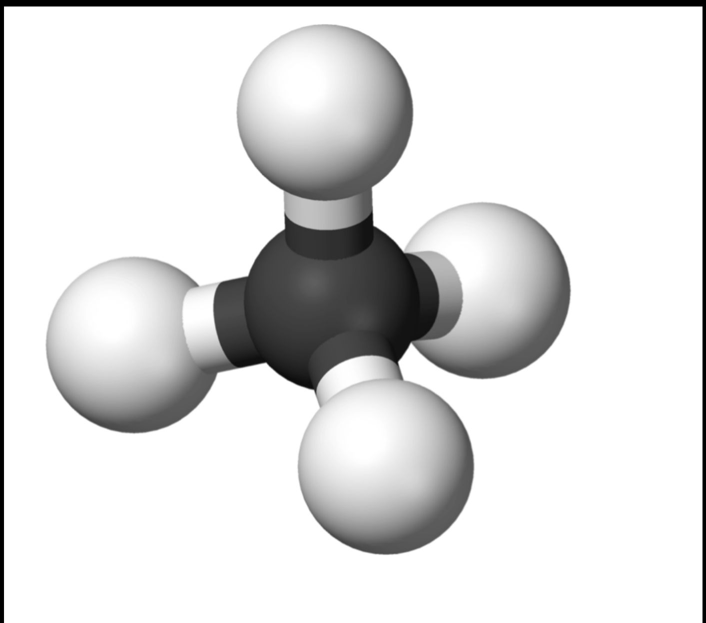
T_a, T_b, hvor a, b er som på figuren.

c) Vi velger en horisontal linje L i mønsteret.

S = speiling i L

$G(x) = S(x) + a$: gliderefleksjon og symmetri av K.

<u>Oppgave 6</u>



Metanmolekylet CH_4 har samme symmetrigruppe som et tetraeder:

* Rotasjoner av orden 3 og 2
* Speilinger.