

# Lineare likningsystemer

Def Et lineært likningsystem i  $n$  variable  $x_1, \dots, x_n$  har formen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Skrives i  $A = (a_{ij})$ ,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

kan dette systemet udtrykkes

på formen

$$A \cdot x = b.$$

Dersom  $b = 0$  kalles systemet  
homogent, ellers inhomogent.

Prop Dersom  $A$  er en invertibel  
kvadratisk matrise, har likningen

$$A \cdot x = b$$

nøyaktig én løsning, nemlig

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Beris,  $Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}Ax$   
 $= A^{-1}b. //$

Ekst:  $x + y = 5$

$$x - y = 1$$

$$2x + 3y = -1.$$

Fra de to første likningene finner

vi  $x = 3, y = 2$ .

Sjekk der siste likning:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \neq -1.$$

$\Rightarrow$  Systemet har ingen løsning.

Merck: Hvis et inhomogent system har flere likninger en ukjent, har man normalt ingen løsning.

Ekse: Likningssystemet

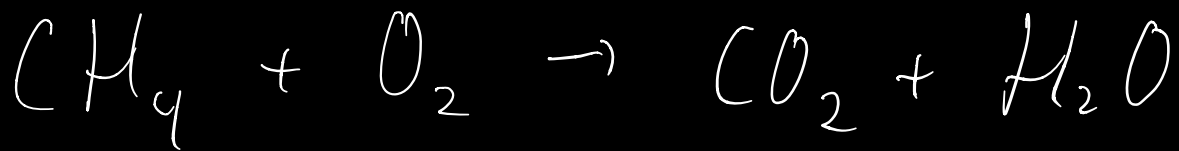
$$x - 2y = 1$$

$$x - 2y = 2$$

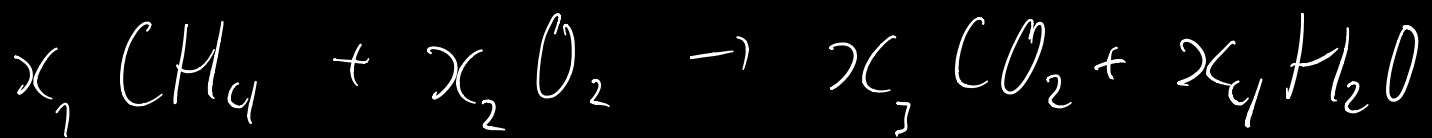
har ingen løsning.

Spjekkbar:  $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

Ekse: Metangass brenner i oksygen med (ubalansert) reaksjonslikning,



Vi ønsker en balansert likning,



$$x_1 = x_3$$

$$4x_1 = 2x_4$$

$$2x_2 = 2x_3 + x_4$$

Vi rydder opp:

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_4 = 0$$

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

$$x_3 = x_1,$$

$$x_4 = 2x_1$$

$$2x_2 = 2x_1 + 2x_1 = 4x_1,$$

$$x_2 = 2x_1$$

Vi vælger  $x_1 = 1$ .



## 2.5 Spektralteori

Husk! La  $A$  være en reell  $n \times n$  matrise. En vektor  $v \neq 0$  kalles en eigenvektor for  $A$  dersom det finnes et reelt tall  $\lambda$  slik at

$$A \cdot v = \lambda v.$$

I så fall kalles  $\lambda$  en eigenverdi for  $A$ .

Prop:  $\lambda$  er en eigenverdi for  $A$   
 $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0.$

Bevis, " $\Rightarrow$ ", Anta  $Av = \lambda v$ ,  $v \neq 0$ .

Da er

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_B v = 0$$

Da kan  $B$  ikke være invertibel,

så  $\det(B) = 0$ .

(Hvis  $B$  var invertibel, måtte

$$v = B^{-1} \cdot 0 = 0 \quad \left( \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)$$

" $\Leftarrow$ " : Udelatt. //

Def: Det karakteristiske polynom

til en kvadratisk matrice  $A$

er definet ved



$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

betraktet som polynom i  $\lambda$ .

Def: Sporet til en kvadratisk  
matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er gitt ved

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \\ &= \text{summen av elementene} \\ &\quad \text{på diagonalen} \end{aligned}$$

Eles:  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ .

$$\text{tr}(A) = a + d$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} (a-\lambda) & c \\ b & (d-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$= \lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A)$$

Ekst:  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}(A) = 3 - 2 = 1$$

$$\det(A) = -6 - (-4) = -2$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Røttene til  $\chi_A(\lambda)$ :

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2}$$

altså  $\lambda = 2$  eller  $\lambda = -1$ .

Altså: Egenverdierne til  $A$  er

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1.$$

Prop: For en  $3 \times 3$  matrix

$A \in$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\lambda^2$$

$$- \frac{1}{2} \left[ (\operatorname{tr}(A))^2 - \operatorname{tr}(A^2) \right] \lambda$$

$$+ \det(A).$$

Beweis for pure triangulære (komplekse)

matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A) = a + b + c$$

$$\det(A) = abc$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a^2 & ? & ? \\ 0 & b^2 & ? \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(A^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)$$

$$= (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$= 2(ab + bc + ac)$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} (a-\lambda) & ? & ? \\ 0 & (b-\lambda) & ? \\ 0 & 0 & (c-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + (a+b+c)\lambda^2$$

$$- (ab + bc + ac)\lambda$$

$$+ abc$$

$$= -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda^2$$

$$- \frac{1}{2} [\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)] \lambda$$

$$+ \det A(A) \quad //$$

Exs:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}(A) = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0$$

$$+ (-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & ? & ? \\ ? & -1 & ? \\ ? & ? & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{tr}(A^2) = -1 - 1 - 4 = -6$$

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= -\lambda^3 + \text{tr}(A) \cdot \lambda^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} [\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)] \lambda \\ &\quad + \det(A) \end{aligned}$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \frac{1}{2} [4 - (-6)] \lambda + 4$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda + 4$$



$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 4)$$

(se  
nedenfor)

Røttene til  $\lambda^2 - \lambda + 4$ :

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot i$$

Konklusion:  $\lambda = 1$  er den eneste reelle egenverdi i  $A$

Her er polynomdivisjon brukta ovenfor:

$$(x^3 - 2x^2 + 5x - 4) : (x - 1) = x^2 - x + 4$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - x^2 + 5x - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - x^2 + x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x - 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x - 4 \\ \hline 0 \end{array}$$