Lineære likningssystemer

<u>Def</u> Et lineært likningssystem i n variable $x_1, \dots, x_n$ har formen

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Skriver vi $A = (a_{ij})$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

kan dette systemet uttrykkes

på formen

$$A \cdot x = b.$$

Dersom $b = 0$ kalles systemet <u>homogent</u>, ellers <u>inhomogent</u>.

<u>Prop</u> Dersom A er en invertibel kvadratisk matrise, har likningen

$$A \cdot x = b$$

nøyaktig én løsning, nemlig

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Bevis: $Ax = b \iff x = A^{-1}Ax$

$$= A^{-1} \cdot b. \quad //$$

Eks: $x + y = 5$

$x - y = 1$

$2x + 3y = -1.$

Fra de to første likningene finner vi $x = 3, \quad y = 2$.

Sjekker siste likning:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 12 \neq -1.$$

$\Rightarrow$ Systemet har ingen løsning.

Merk: Hvis et inhomogent system har flere likninger enn ukjente, har man normalt ingen løsning.

Eks: Likningssystemet

$$x - 2y = 1$$

$$x - 2y = 2$$

har ingen løsning.

Sjekker: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

Eks: Metangass brenner i oksygen med (ubalansert) reaksjonslikning

$$CH_4 + O_2 \to CO_2 + H_2O$$

Vi ønsker en balansert likning

$$x_1 CH_4 + x_2 O_2 \to x_3 CO_2 + x_4 H_2O$$

$$x_1 = x_3$$
$$4x_1 = 2x_4$$
$$2x_2 = 2x_3 + x_4$$

Vi ordner opp:

$$x_1 - x_3 = 0$$

$$2x_1 - x_4 = 0$$

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$$

$x_3 = x_1$,

$x_4 = 2x_1$

$2x_2 = 2x_1 + 2x_1 = 4x_1$,

$x_2 = 2x_1$

Vi velger $x_1 = 1$:

$$CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O.$$

2.5 Spektralteori

Husk: La A være en reell $n \times n$ matrise. En vektor $v \neq 0$ kalles en *egenvektor* for A dersom det fins et reelt tall λ slik at

$$A \cdot v = \lambda v.$$

I så fall kalles λ en *egenverdi* for A.

Prop: λ er en egenverdi for A

$$\iff \det(A - \lambda I) = 0.$$

Bevis: "$\Rightarrow$": Antar $Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

Da er

$$\underbrace{(A - \lambda I)}_{B} v = 0$$

Da kan B ikke være invertibel, så $\det(B) = 0$.

(Hvis B var invertibel, måtte

$$v = B^{-1} \cdot 0 = 0 \quad \lightning \;)$$

"$\Leftarrow$": Utelatt. //

Def: Det *karakteristiske polynomet* til en kvadratisk matrise A er definert ved

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

betraktet som polynom i λ.

Def: Sporet til en kvadratisk matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er gitt ved

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

= summen av elementene på diagonalen

Eks: $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$\operatorname{tr}(A) = a + d$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} (a-\lambda) & c \\ b & (d-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc$$

$$= \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\cdot\lambda + \det(A)$$

__Eks:__

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = 3 - 2 = 1$$

$$\det(A) = -6 - (-4) = -2$$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

Røttene til $\chi_A(\lambda)$:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm 3}{2}$$

dvs: $\lambda = 2$ eller $\lambda = -1$.

__Altså:__ Egenverdiene til A er $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Prop: For en 3×3 matrise A er

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + tr(A)\lambda^2 - \frac{1}{2}\left[(tr(A))^2 - tr(A^2)\right]\lambda + det(A).$$

Bevis for øvre triangulære (komplekse) matriser:

$$A = \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$tr(A) = a + b + c$$

$$\det(A) = abc$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & ? & ? \\ 0 & b & ? \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & ? & ? \\ 0 & b^2 & ? \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)$$

$$= (a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

$$= 2(ab + bc + ac).$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= \begin{vmatrix} (a-\lambda) & ? & ? \\ 0 & (b-\lambda) & ? \\ 0 & 0 & (c-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + (a+b+c)\lambda^2$$

$$- (ab + bc + ac)\lambda$$

$$+ abc$$

$$= -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\cdot\lambda^2$$

$$- \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right]\lambda$$

$$+ \det(A) \,. \qquad //$$

Eks:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = 1+1+0 = 2$$

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0$$

$$+ (-2) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 + 2 = 4$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & ? & ? \\ ? & -1 & ? \\ ? & ? & -4 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{tr}(A^2) = -1-1-4 = -6$$

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\cdot\lambda^2 - \frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right]\lambda + \det(A)$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \frac{1}{2}\left[4-(-6)\right]\lambda + 4$$

$$= -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 4)$ (se nedenfor)

Røttene til $\lambda^2 - \lambda + 4$:

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot i$$

<u>Konklusjon</u>: $\lambda = 1$ er den eneste reelle egenverdien til A

Her er polynomdivisjonen brukt ovenfor:

$$(\lambda^3 - 2\lambda^2 + 5\lambda - 4) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - \lambda + 4$$

$$\underline{\lambda^3 - \lambda^2 \qquad\qquad\qquad}$$

$$-\lambda^2 + 5\lambda - 4$$

$$\underline{-\lambda^2 + 1 \qquad\quad}$$

$$4\lambda - 4$$

$$\underline{4\lambda - 4}$$

$$0$$