# Mer om gruppa $O(3)$

**Husk** Den Euklidske gruppa $E(n)$ består av alle isometrier $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

**Teorem** Enhver endelig undergruppe $G$ av $E(n)$ har et fikspunkt.

**Bevis:** Sett $n = |G|$ og velg $p \in \mathbb{R}^n$.

Vi vil vise at

$$q = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g(p)$$

er et fikspunkt for $G$. La $h \in G$.

Vi kan skrive

$$h(x) = Ax + v, \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

hvor $A \in O(n)$ og $v \in \mathbb{R}^n$. Da er

$$h(q) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} Ag(p) + v$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \left( Ag(p) + v \right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} (hg)(p)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g(p)$$

$$= q. \quad //$$

<u>Anvendelse</u>: Anta $q \in \mathbb{R}^n$ er et fikspunkt for $Sym(F)$, $F \subset \mathbb{R}^n$, og sett

$$F' = F - q = \{ x - q \mid x \in F \}.$$

Da er $\mathrm{Sym}(F') \cong \mathrm{Sym}(F)$, og $O$ er et fikspunkt for $F'$. Altså består $\mathrm{Sym}(F')$ kun av punktsymmetrier og kan derfor identifiseres med en undergruppe av $O(n)$.

<u>Husk</u>: En punktsymmetri har formen

$$m(x) = Ax, \quad \text{hvor } A \in O(n).$$

<u>Teorem</u> De endelige undergruppene av $SO(3)$ er opp til isomorfi som følger:

(i) De sykliske gruppene $C_n$, $n \geq 1$.

(ii) Diedergruppene $D_n$, $n \geq 2$.

(iii) Tetraedergruppa $\mathbb{T}$

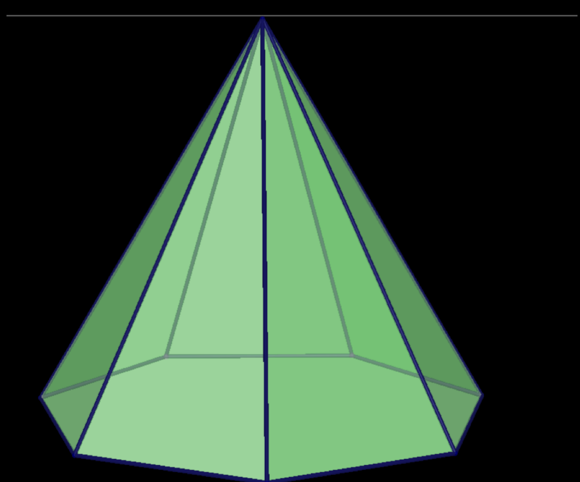
(iv) Oktaedergruppa $\mathbb{O}$

(v) Ikosaedergruppa $\mathbb{I}$.

Bevis: Utelatt. //

Beskrivelse av gruppene:

1

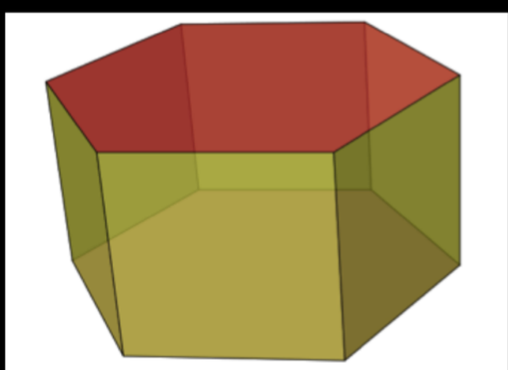


$K_n$ = pyramide (eller kjegle) over et regulært n-kantet polygon i xy-planet, og med over hjørne på $z$-aksen.

$$\mathrm{Sym}_0(K_n) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi k}{n} & -\sin\frac{2\pi k}{n} & 0 \\ \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, k = 0, \dots, n-1 \right\}$$

Dette er en syklisk gruppe som vi kan identifisere med $C_n$.

2

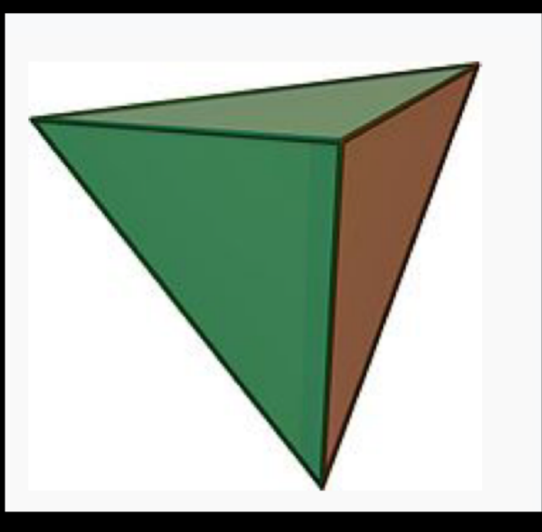


$P_n$ = prisme over regulært n-kantet polygon $L_n$ i xy-planet og med sentrum i origo.

$$\mathrm{Sym}_0(P_n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}(L_n) = D_n.$$

De orienteringsreverserende isometriene av $L_n$ svarer til rotasjoner av $P_n$ om en akse i xy-planet gjennom $O$ og med vinkel $\pi$.

3

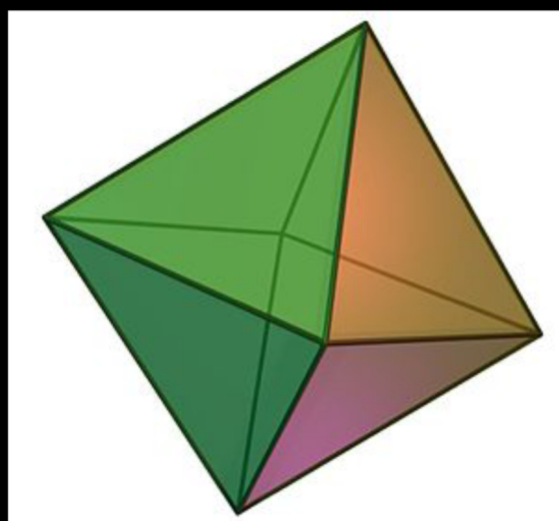


$\Delta_4$ = $\underbrace{\text{regulært}}_{\text{alle sidene er regulære polygoner.}}$ tetraeder

4 sider, 6 kanter, 4 hjørner.

Tetraedergruppa $\mathbb{T} = \mathrm{Sym}_0(\Delta_4)$.

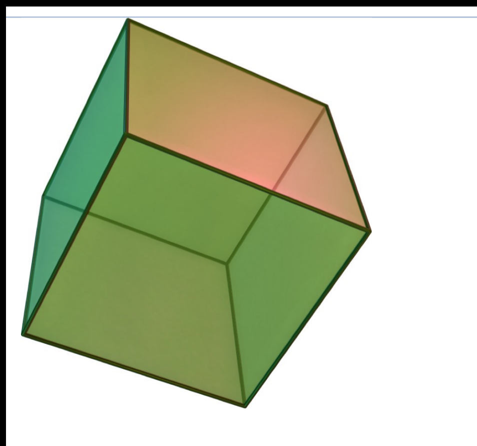
(4)



$\Delta_8$ = regulært oktaeder

8 sider, 12 kanter, 6 hjørner.

Oktaedergruppa $O = \mathrm{Sym}(\Delta_8)$.



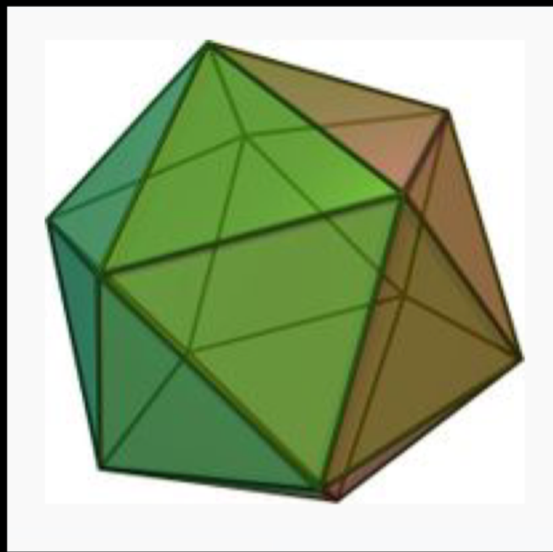
$\square_6$ = regulært heksaeder (= kube)

6 sider, 12 kanter, 8 hjørner.

$\Delta_8$ og $\square_6$ er duale polyedre, dvs. midtpunktene i sidene til $\Delta_8$ danner hjørnene i $\square_6$, og omvendt.

$\Rightarrow \mathrm{Sym}_0(\Delta_8) = \mathrm{Sym}(\square_6)$.

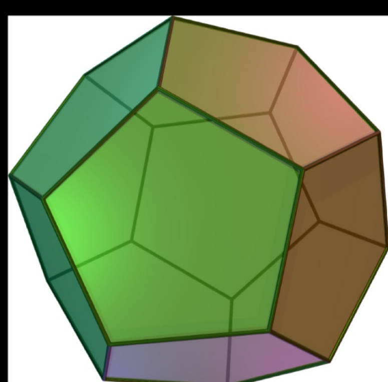
5



$\Delta_{20}$ = regulært ikosaeder

20 sider, 30 kanter, 12 hjørner.

Ikosaedergruppa $\mathbb{I} = \mathrm{Sym}_0(\Delta_{20})$



$\pentagon_{12}$ = regulært dodekaeder.

12 sider,

$$\frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ kanter.}$$

$$\frac{12 \cdot 5}{3} = 20 \text{ hjørner.}$$

$\Delta_{20}$ og $\pentagon_{12}$ er duale polyedre og har derfor samme symmetrigruppe.

<u>Eulers polyedersetning</u>

Hvis et regulært polyeder har

$S$ sider, $K$ kanter, $H$ hjørner,

så er

$$H - K + S = 2.$$

Eks: Dodekaeder:

$$H - K + S = 20 - 30 + 12 = 2.$$

Teorem Hvis et regulært polyeder $P$ har $n$ $k$-kantede sider, så er

$$|\mathrm{Sym}_0(P)| = nk.$$