Mer om spektralteori

Husk: Hvis A er en $n \times n$ matrise:

$$Av = \lambda v, \qquad v \neq 0.$$

v : egenvektor
λ : egenverdi.

λ egenverdi for $A \iff \chi_A(\lambda) = 0$.

Prop: Hvis A er invertibel og

$Av = \lambda v$, $v \neq 0$, så er

$$A^{-1}v = \lambda^{-1}v.$$

Bevis: $v = \underbrace{A^{-1}A}_{I} v = A^{-1}(\lambda v)$

$$= \lambda A^{-1} v.$$

Fordi $v \neq 0$, må $\lambda \neq 0$, og

$$A^{-1} v = \lambda^{-1} v. \quad //$$

Prop: Hvis A er en kvadratisk matrise, så har A og A^T de samme egenverdiene.

Bevis $(A-\lambda I)^T = A^T - \lambda I$

$$\det(A^T - \lambda I) = \det\left[(A-\lambda I)^T\right]$$
$$= \det(A - \lambda I)$$

$$\Rightarrow \chi_{A^T} = \chi_A. \qquad //$$

Prop Hvis λ er en (reell) egenverdi til en ortogonal matrise A, så er $\lambda = \pm 1$.

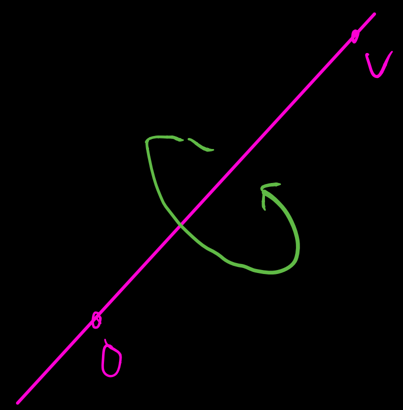
Bevis: La $Av = \lambda v$, $v \neq 0$.

$$0 < \underbrace{v \cdot v}_{\text{skalarprodukt}} = Av \cdot Av = \lambda v \cdot \lambda v$$

$$= \lambda^2 \, v \cdot v$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \iff \lambda \neq \pm 1. \quad //$$

Teorem Hvis A er en ortogonal 3×3 matrise og $\det(A) = 1$, så er $\lambda = 1$ en egenverdi for A.



rotasjonsakse

<u>Bevis</u>

$$A - I = A - A^T A$$
$$= (I - A^T) A$$
$$= (I - A)^T \cdot A$$

$$\Rightarrow \det(A - I) = \det\left[(I - A)^T\right] \cdot \det(A)$$
$$= \det(I - A)$$
$$= (-1)^3 \det(A - I)$$

$$= -\det(A-I)$$

$$\Rightarrow \det(A-I) = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\lambda = 1$ er en egenverdi for A. //

<u>Lemma</u> Hvis A og C er $n \times n$ matriser og C er invertibel, så har A og CAC^{-1} det samme karakteristiske polynom.

Bevis:

$$CAC^{-1} - \lambda I = C(A - \lambda I)C^{-1}$$

$$\chi_{CAC^{-1}}(\lambda) = \det(CAC^{-1} - \lambda I)$$

$$= \det(C) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(C)^{-1}$$

$$= \chi_A(\lambda). \qquad //.$$

Teorem (Cayley-Hamilton)

For enhver $n \times n$ matrise A

gjelder

$$\chi_A(A) = 0$$

Dette betyr: Hvis

$$\chi_A(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0,$$

så er

$$\chi_A(A) = c_nA^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I$$

Besnærende idé til bevis:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

$$\chi_A(A) \overset{?}{=} \det(A - A) = 0$$

→ ikke opplagt!

<u>Bevisskisse</u>

<u>Tilfelle 1:</u> A diagonal.

For $n=2$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$= (\lambda_1 - \lambda)\cdot(\lambda_2 - \lambda)$$

$$= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

$$\chi_A(A) = A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)A + \lambda_1\lambda_2 I$$

$$= (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0.$$

Tilsvarende holder for alle n.

<u>Tilfelle 2</u>: $A = CDC^{-1}$, hvor

C, D er komplekse $n \times n$ matriser

og D er diagonal

For $n = 2$: $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$,

hvor a, b er reelle tall

$$(CDC^{-1})^2 = CDC^{-1} \cdot CDC^{-1}$$
$$= CD^2C^{-1}$$

$$\chi_A(A) = (CDC^{-1})^2 + aCDC^{-1} + bI$$

$$= CD^2C^{-1} + aCDC^{-1} + bI$$

$$= C\left(D^2 + aD + bI\right)C^{-1}$$

$$= C\,\chi_A(D)\,C^{-1}$$

$$= C\,\underbrace{\chi_D(D)}_{0}\,C^{-1}$$

$$= 0$$

Tilsvarende fungerer for alle n.

Det generelle tilfellet:

"Nesten alle" $n \times n$ matriser A

kan skrives som CDC^{-1}.

Ved kontinuitet må $\chi_A(A) = 0$

for alle A. //

<u>Anvendelse</u>: Hvis A er en

3×3 matrise, er

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\cdot\lambda^2$$
$$-\frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right]\lambda$$
$$+\det(A)$$

Siden $\chi_A(A) = 0$, får vi

$$\det(A)\cdot I = A^3 - \operatorname{tr}(A)\cdot A^2$$
$$+\frac{1}{2}\left[\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\right]A$$

Hvis A er invertibel, kan vi

multiplisere med $\det(A)^{-1}\cdot A^{-1}$

og får da

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left[A^2 - tr(A) \cdot A + \frac{1}{2}\left(tr(A)^2 - tr(A^2) \right) I \right]$$

<u>Eks:</u> La

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 13$ (regnet ut tidligere)

$tr(A) = 0 + 2 - 1 = 1$

$A^2 =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A^2) = -5 + 7 - 7 = -5$$

$$\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2) = 1 - (-5) = 6$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\left[\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \\ -1 & 5 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & 8 & -6 \\ -5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Mer om Householdertransformer:

Prop: La

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

være en søylevektor, $v \neq 0$,

og

$$Q_v = I - \frac{2}{\|v\|^2} \cdot v v^T$$

den tilsvarende Householder-transformasjonen.

Da gjelder:

(i) $Q_v \cdot v = -v$

(ii) Dersom w er en

søylevektor med $v \cdot w = 0$,

så er $Q_v(w) = w$.

Bevis: For en vilkårlig vektor

w er

$$Q_v(w) = w - \frac{2}{\|v\|^2} v \overbrace{v^T w}^{v \cdot w}$$

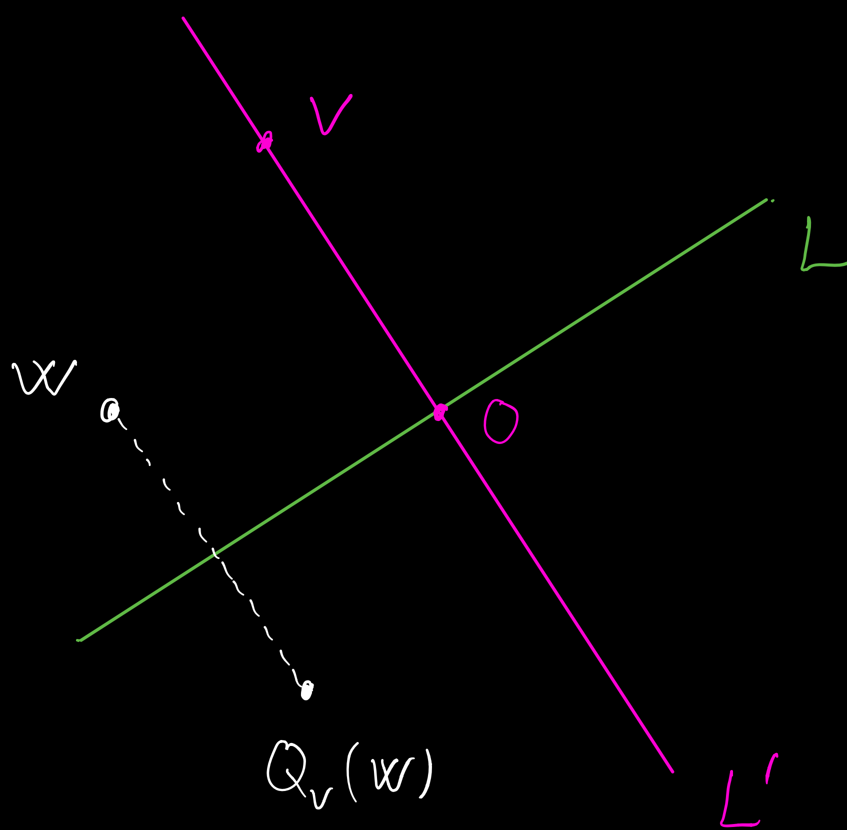
$$= w - 2\frac{v \cdot w}{\|v\|^2} \cdot v$$

(i) $Q_v(v) = v - 2v = -v$

(ii) Thus $v \cdot w = 0$, so

$$Q_v(w) = w. \qquad //$$

<u>For $n=2$:</u>



L' = linjen gjennom 0 og v

L = linjen gjennom 0 som står normalt på L'

$Q_v(w)$ = speilingen av w i L.