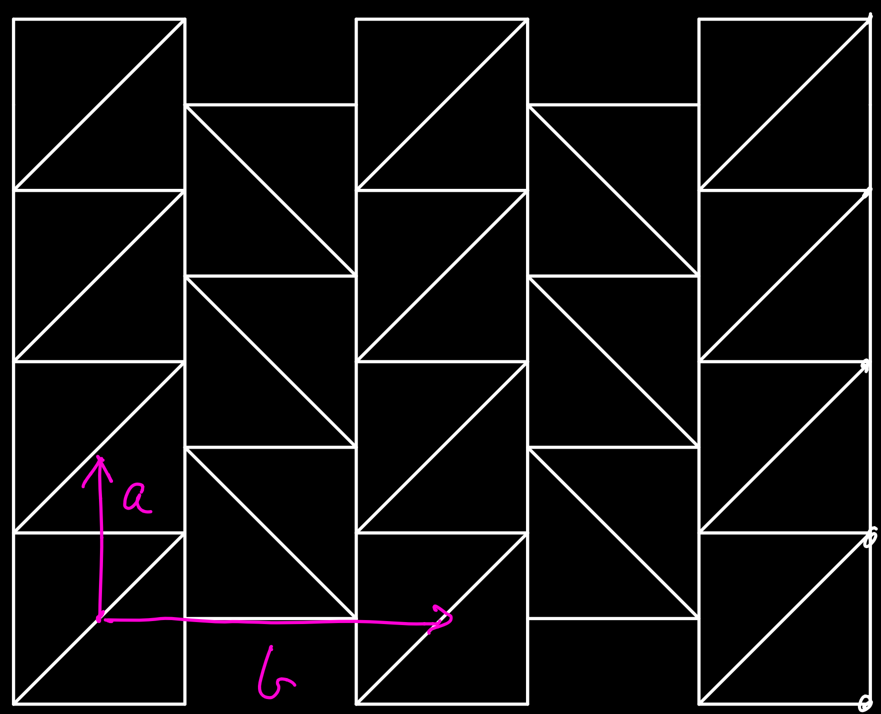
Mer om plane krystaller



Eksempel på krystallstruktur.

Def: La P være en krystallstruktur i $\mathbb{R}^2$. Symmetrigruppen til P er

$\mathrm{Sym}(P)$ = mengden av alle isometrier

$m: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som sender celler på celler.

Sym(P) er et eksempel på en <u>krystallografiske</u> gruppe.

Trans(P) := mengden av translasjons $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som sender celler på celler.

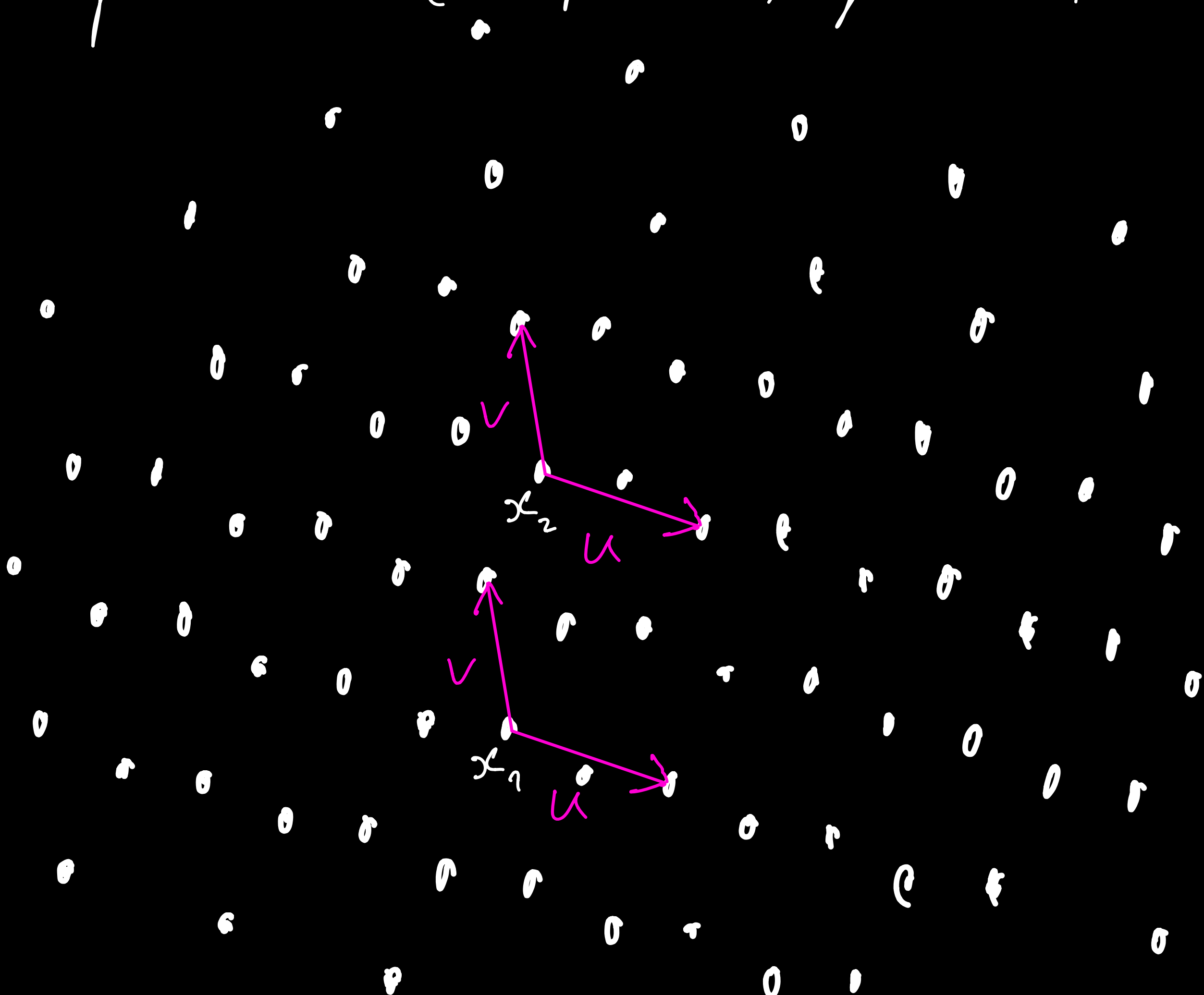
<u>Teorem</u> (Bieberbach)
For enhver krystallstruktur P i $\mathbb{R}^2$ fins en basis $\{a, b\}$ for $\mathbb{R}^2$ slik at

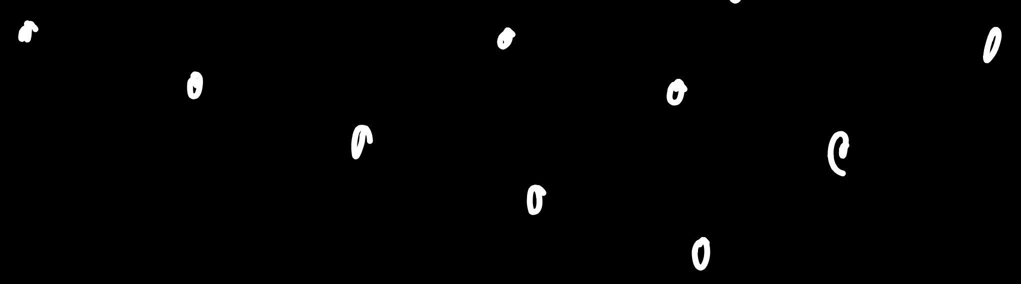
$$\mathrm{Trans}(P) = \{ T_{ma+nb} \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

Def: La $M \subset \mathbb{R}^2$ være en endelig delmengde og $\{u, v\}$ en basis for $\mathbb{R}^2$. Da kalles mengden

$$\mathfrak{M} = \{ x + mu + nv \mid x \in M;\ m, n \in \mathbb{Z} \}$$

et plant (krystall) gitter.





Eksempel med $M = \{x_1, x_2\}$

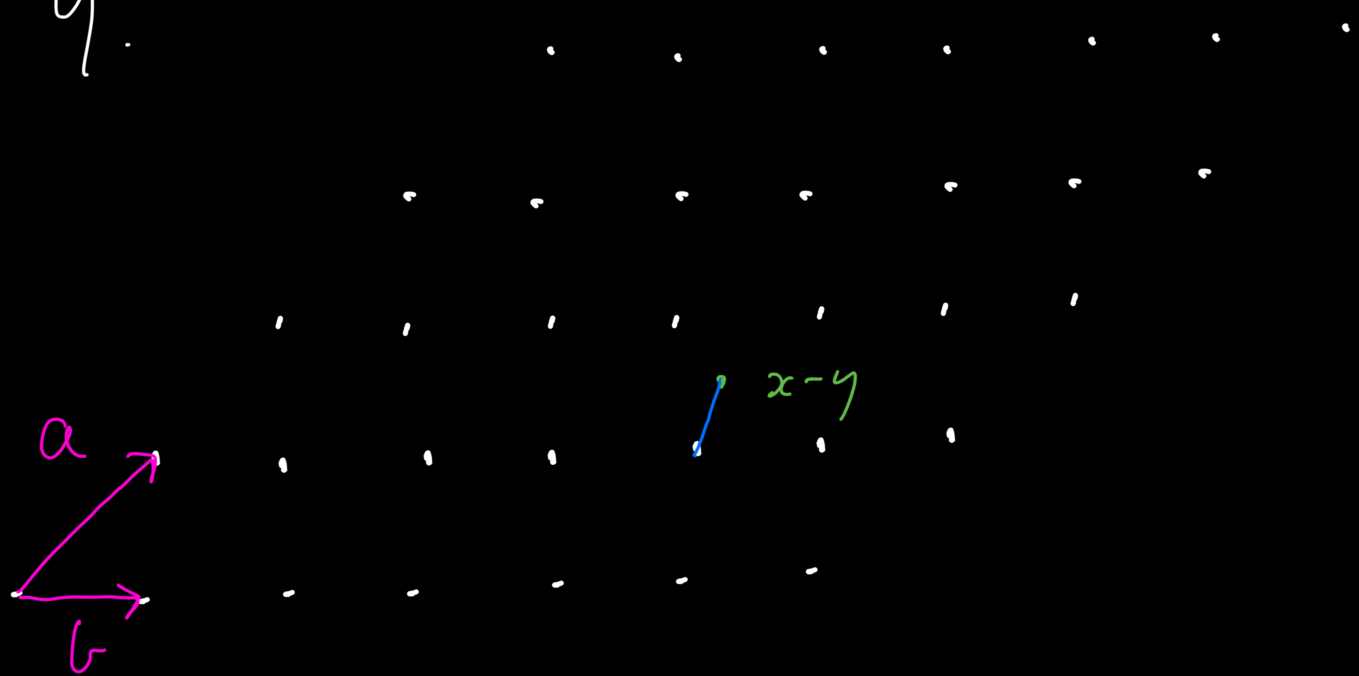
$\mathrm{Sym}(M)$ = mengden av alle isometrier $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at $m(M) = M$.

<u>Prop</u>: Hvis M er et krystallgitter, så finnes det en $d > 0$ slik at for alle $p, q \in M$, $p \neq q$, er

$$|p - q| \geq d.$$

<u>Bevis</u>: $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v := \{mu + nv \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$.

For alle $x, y \in M$ la $d_{x,y} > 0$ være den minste avstand fra $x-y$ til et punkt i $\mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v$ forskjellig fra $x-y$.



$$d := \min_{x,y} d_{x,y} > 0.$$

La

$$p_1 = x_1 + m_1 u + n_1 v$$

$$p_2 = x_2 + m_2 u + n_2 v$$

være to forskjellige punkter i M, hvor $x_i \in M$, $m_i, n_i \in \mathbb{Z}$.

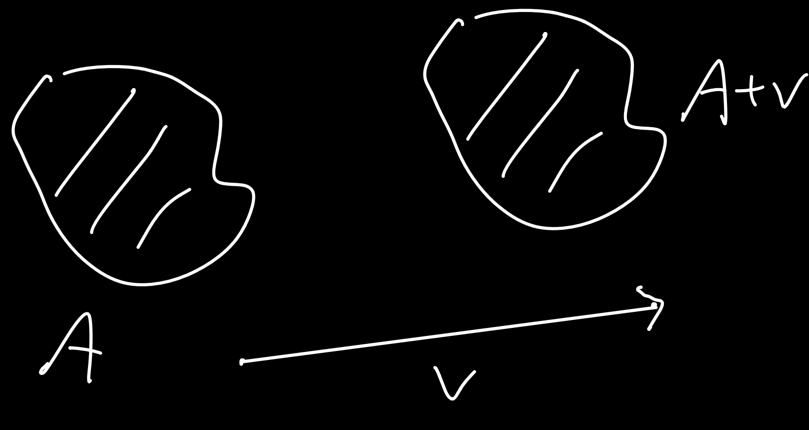
Då er

$$|p_1 - p_2| = |x_1 - x_2 + (m_1 - m_2)u + (n_1 - n_2)v| \geq d_{x_1, x_2} \geq d > 0.$$

//.

<u>Def</u>: For $A \subset \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$ definerer vi

$$A + v = \{ a + v \mid a \in A \}$$



Def: La $\mathcal{M}$ være et gitter.
En vektor $v \in \mathbb{R}^2$ kalles et translat for $\mathcal{M}$ dersom

$$\mathcal{M} + v = \mathcal{M},$$

dvs. dersom $T_v \in Sym(\mathcal{M})$.

Prop: Hvis $\mathcal{M}$ er et gitter, så fins det en basis $\{a, b\}$ for $\mathbb{R}^2$ slik at

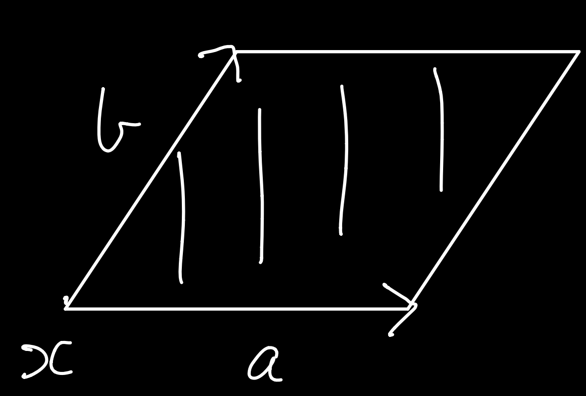
mengden av translater for $\mathcal{M}$
$$= \{ma + nb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Bevis: Kan utledes fra forrige proposisjon. //

Def: Hvis M, a, b er som ovenfor, og $x \in \mathbb{R}^2$, så kalles parallelogrammet

$$\left\{ x + sa + tb \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \leq s \leq 1, \\ 0 \leq t \leq 1 \end{matrix} \right\}$$

en <u>enhetscelle</u>.



<u>Lemma</u> La $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være en isometri gitt ved

$$m(x) = Ax + b,$$

og $v \in \mathbb{R}^n$. Da er

$$m \circ T_v \circ m^{-1} = T_{Av}.$$

Merk: $T_v(x) = x + v.$

Bewis: $m^{-1}(x) = A^{-1}(x-b).$

$$(m \circ T_v \circ m^{-1})(x)$$
$$= m\left(A^{-1}(x-b) + v\right)$$
$$= A\left(A^{-1}(x-b) + v\right) + b$$
$$= x - b + Av + b$$
$$= x + Av$$
$$= T_{Av}(x). \quad //.$$

Korollar Hvis $m(x) = Ax + b$ er en symmetri og v et translat for M, så er Av også et translat for M. //

Lemma Enhver rotasjonssymmetri R av et gitter M må ha endelig orden.

Bevis: Anta at R har uendelig orden. La p være rotasjonssenteret. For $1 \leq k < l$ er da

$$R^l = R^k \circ \underbrace{R^{l-k}}_{} \neq R^k$$

$\neq Id$

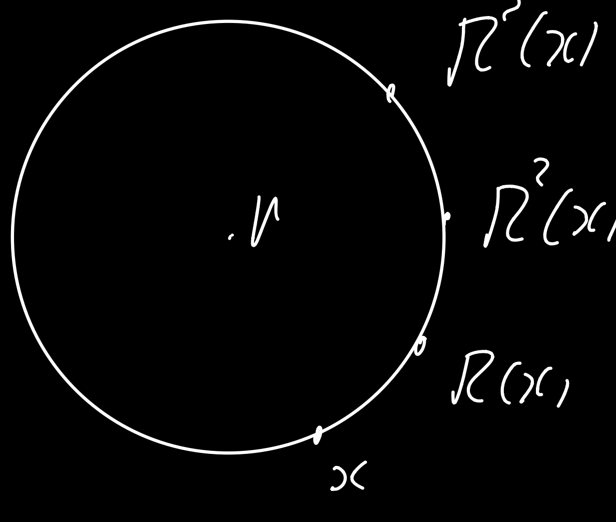
$\Rightarrow$ $Id, R, R^2, R^3, \ldots$

er parvis forskjellige.

Velg et gitterpunkt $x \neq p$.
Da er

$x, R(x), R^2(x), R^3(x), \ldots$

parvis forskjellige punkter i M som alle ligger på den samme sirkelen om p: Umulig.



//

Lemma La R være en rotasjon i planet av orden $k \geq 2$. Da fins et naturlig tall $j \geq 1$ slik at R^j har rotasjonsvinkel $2\pi/k$.

Husk: R har orden k hvis

* $R^k = Id$,
* $R^i \neq Id$ for $i = 1, \dots, k-1$.

Bevis: Vi benytter komplekse tall. La $p \in \mathbb{C}$ være rotasjonssentret til R. Da kan R uttrykkes på formen

$$R(p+z) = p + wz$$

for en passende $w \in \mathbb{C}$. Siden

$$R^j(p+z) = p + w^j z,$$

må $w^k = 1$, og

$$1, w, w^2, \dots, w^{k-1}$$

må være parvis forskjellige.
Det fins nøyaktig k komplekse tall z slik at $z^k = 1$, nemlig

$$e^{2\pi i s/k}, \quad \text{hvor } s = 0, \dots, k-1.$$

$\Rightarrow$ Det fins en $j \geq 1$ slik at

$$w^j = e^{2\pi i/k}.$$

Da har R^j rotasjonsvinkel $2\pi/k$.

//.

<u>Lemma</u> La R er en rotasjons-symmetri av et gitter M med rotasjonsvinkel θ. Hvis $R^2 \neq Id$, må

$$|\cos\theta| \leq \frac{1}{2}.$$

<u>Bevis</u>: La $R(x) = Ax + b$, og

La p være rotasjonssentrert for R. Da er for alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
R(p+x) &= A(p+x) + b \\
&= Ax + \underbrace{Ap + b}_{R(p) = p} \\
&= p + Ax
\end{aligned}
$$

Siden $R^2 \neq Id$, må $A^2 \neq I$.

La $c \neq 0$ være et translat for M med minste positive norm (dvs, $\|c\| \leq \|c'\|$ for alle translater $c' \neq 0$). Siden $A^2 \neq I$, må

$Ac \neq \pm c$. Vi har

c translat for M

$\Rightarrow$ Ac translat

$\Rightarrow$ $Ac \pm c$ translat

$$\|c\|^2 \leq \|Ac \pm c\|^2$$

$$= \|Ac\|^2 \pm 2Ac \cdot c + \|c\|^2$$

$$= 2\|c\|^2 \pm 2Ac \cdot c.$$

$$\Rightarrow \frac{|Ac \cdot c|}{\|c\|^2} \leq \frac{1}{2}.$$

La

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Da er

$$Ac \cdot c = \cos\theta \cdot \|c\|^2,$$

så $|\cos\theta| \leq \frac{1}{2}$. //

<u>Teorem</u> La R være en rotasjons-symmetri av et gitter M. Da har R orden

1, 2, 3, 4 eller 6.

<u>Bevis</u>: (i) Hvis $R^2 = Id$, så har R orden 1 eller 2

(ii) Anta nå $R^2 \neq \mathrm{Id}$. La $k \geq 3$ være ordenen til R. Velg $j \geq 1$ slik at $R_0 := R^j$ har rotasjonsvinkel $2\pi/k$. Siden cos er strengt fallende på intervallet $[0, \pi)$, finner vi:

$$\cos\theta \leq \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{k} = \theta \geq \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \quad k \leq 6.$$

Anta nå $k = 5$. Da har

R_0^2 rotasjonsvinkel $\frac{4\pi}{5}$. Men

$$\frac{4}{5} > \frac{2}{3} \Rightarrow \cos\frac{4\pi}{5} < \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\cos\frac{4\pi}{5}\right| > \frac{1}{2} \quad \lightning.$$

//.