Lineære rom og avbildninger

<u>Def</u>: Et <u>vektorrom</u> (= lineært rom) er en mengde V hvor addisjon og skalarmultiplikasjon er definert, dvs. at for $x, y \in V$, $a \in \mathbb{R}$ er

$$x + y \quad , \quad ax$$

definert som nye elementer av V. Disse operasjonene skal oppfylle følgende aksiomer:

(i) Addisjon er assosiativ og kommutativ; dvs:

$$(x+y)+z = x+(y+z),$$

$$x+y = y+x.$$

(ii) Det fins et element $0 \in V$ slik at

$$x + 0 = x \quad \text{for alle } x \in V.$$

(iii) For alle $x \in V$ fins det et element $-x$ slik at

$$x + (-x) = 0.$$

(iv) Skalarmultiplikasjon oppfyller:

$$a(bx) = (ab)x$$

$$1 \cdot x = x$$

$$(a+b)x = ax + bx$$

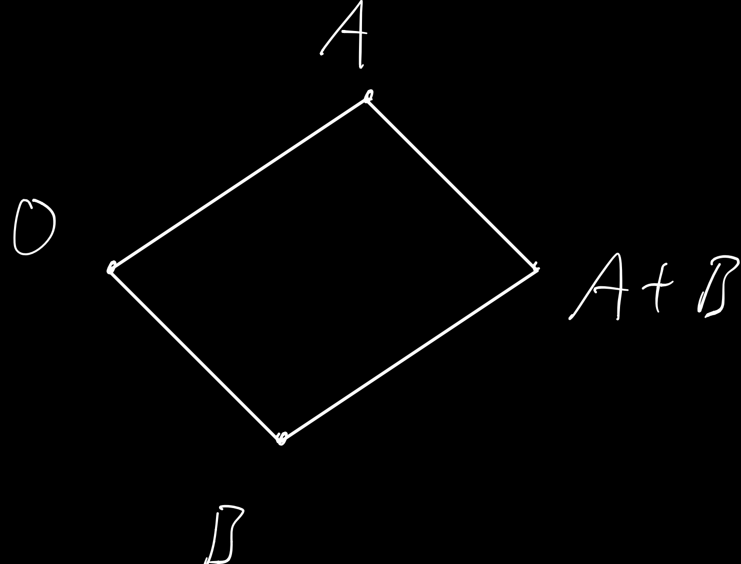
$$a(x+y) = ax + ay$$

for alle $x, y \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$.

<u>Eks</u>: $\mathbb{R}^2$ = mengden av alle ordnede par (a, b) av reelle tall.

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$t(a, b) = (ta, tb).$$



<u>Eks</u>: $\mathbb{R}^n$ = mengden av alle
n-tupler $(a_1, \cdots, a_n)$
av reelle tall.

Addisjon og skalarmultiplikasjon
skjer komponentvis.

<u>Eks</u>: $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ = mengden
alle reelle $m \times n$ matriser
: reelt vektorrom

<u>Eks</u>: $V = \mathcal{F}(I)$ = mengden av
alle reelle funksjoner definert

på et intervall $I \subset \mathbb{R}$.
Hvis f, g er to slike funksjoner, definerer vi $f+g$ ved

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

For $c \in \mathbb{R}$ er cf definert ved

$$(cf)(x) = c \cdot f(x).$$

<u>Def</u>: Hvis V er et vektorrom og $U \subset V$ er en delmengde som selv er et vektorrom under de samme operasjonene

addisjon og skalarmultiplikasjon, så kalles U et <u>underrom</u> av V.

<u>Eks</u>: $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$

$= \{\text{alle funksjoner på } \mathbb{R}\}$

$$U = \{a\cos x + b\sin x \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

<u>Def</u>: Et (reelt) polynom av grad $\leq n$ har formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

hvor $a_0, a_1, \dots, a_n$ er reelle tall.

Eks: P_n = {alle reelle polynomer av grad $\leq n$}

$\subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$

underrom

Def: En lineær kombinasjon av elementer $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ er en sum

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

hvor $a_1, \dots, a_n$ er reelle tall

Def: En delmengde W av et vektorrom V sies å utspenne V

dersom ethvert element av V er en linear kombinasjon av elementer av W.

<u>Eks</u>: $W = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ utspenner $\mathcal{P}_n$.

Def: En delmengde $\mathcal{B}$ av et vektorrom V kalles <u>lineært avhengig</u> dersom det fins reelle tall $a_1, \dots, a_n$, ikke alle like 0, og $v_1, \dots, v_n \in \mathcal{B}$ slik at

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0.$$

Ellers kaller $\mathcal{B}$ <u>lineært uavhengig</u>.

<u>Merk</u>: Hvis $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ og $a_1 \neq 0$, så er

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} v_2 - \frac{a_3}{a_1} v_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1} v_n$$

<u>Altså</u>: $\mathcal{B}$ lineært avhengig

$$\Updownarrow$$

minst ett element fra $\mathcal{B}$ kan uttrykkes som en lineær kombinasjon av de andre elementene av $\mathcal{B}$.

<u>Eks</u>: $\{\cos x, \sin x\}$ er lineært uavhengig som delmengde av $\mathcal{F}(\mathbb{R})$:

<u>Bevis</u>: Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ og

$$a\cos x + b\sin x = 0 \quad \text{for alle } x,$$

får vi:

For $x = 0$: $\quad 0 = a\cos 0 + b\sin 0 = a$

For $x = \frac{\pi}{2}$: $\quad 0 = a\cos\frac{\pi}{2} + b\sin\frac{\pi}{2} = b$

//

<u>Def.</u>: En delmengde $\mathcal{B}$ av et vektorrom V kalles en <u>basis</u> for V dersom:

(i) $\mathcal{B}$ utspenner V, og

(ii) $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig.

<u>Eks:</u> La $V = \mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Er $\mathbb{R}^2$ utspent av $\mathcal{B}$?

La $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Vi søker $a, b \in \mathbb{R}$ slik at

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

altså
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -4-6 = -10 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Vi har nøyaktig en løsning

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^2$.

Eks: $\mathbb{R}^n$ har standardbasisen

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, hvor

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i-te komponent er lik 1, og alle andre er lik 0.}$$

Eks: $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ er en basis for $\mathcal{P}_n$.

Lemma Hvis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\}$ er en basis for et vektorrom V og $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_s\}$ en lineært uavhengig delmengde, så er $s \leq r$.

Bevis: Vi kan skrive

$$w_1 = a_1 v_1 + \dots + a_r v_r$$

og kan anta $a_1 \neq 0$. Da er

$$v_1 = \frac{1}{a_1} \cdot w_1 - \frac{a_2}{a_1} \cdot v_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} v_r$$

$\Rightarrow \{w_1, v_2, \dots, v_r\}$ er en basis for V.

Vi kan skrive

$$w_2 = b_1 w_1 + b_2 v_2 + \dots + b_r v_r$$

Siden C er lineært uavhengig, kan ikke alle $b_2, \dots, b_r$ være lik 0. Vi kan anta $b_2 = 0$.

Da må $\{w_1, w_2, v_3, \dots, v_r\}$ være en basis for V.

Ved å fortsette slik finner vi at

$$\{w_1, \dots, w_r\}$$

er en basis for V. Hvis $s > r$, er derfor

$$w_{r+1} = c_1 w_1 + \cdots + c_r w_r,$$

så C er lineært avhengig ↯.

Altså må $s \leq r$. //

Teorem Hvis $\{v_1, \dots, v_r\}$ og $\{w_1, \dots, w_s\}$ er baser for det samme vektorrom V, må

$$r = s.$$

Def: Hvis V har en endelig basis $\{v_1, \dots, v_r\}$, så kalles

$$\dim V = r$$

dimensjonen til V.

Eks: $\dim \mathbb{R}^n = n$

$\dim \mathcal{P}_n = n+1$

Prop: La V være et vektorrom av dimensjon n.

(i) Hvis $U \subset V$ er et underrom, så er $\dim U \leq \dim V$.

(ii) Enhver lineært uavhengig delmengde $\{v_1, \dots, v_r\}$ kan utfylles til en basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ for V.

Bevis: Utelatt.