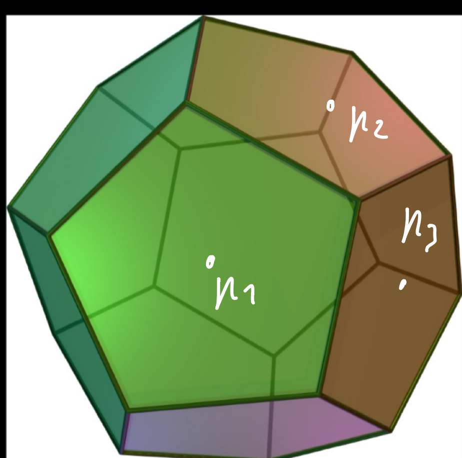
Mer om den ortogonale gruppa $O(3)$

<u>Teorem</u> Hvis et regulært polyeder P har n k-kantede sider, så er

$$|\mathrm{Sym}_0(P)| = nk.$$

<u>Bevis</u>: La $p_1, \dots, p_n$ være midtpunktene i sidene til P.



Hver symmetri m av P gir opphav til en permutasjon av sidene til P og dermed av mengden $\{p_1, \cdots, p_n\}$. Idéen er nå å gruppen symmetriene etter hvor de sender midtpunktet p_1. La

$$f : \mathrm{Sym}_0(P) \to \{p_1, \cdots, p_n\}$$

$$f(m) = m(p_1)$$

og

$$\Gamma = \{ m \in \mathrm{Sym}_0(P) \mid m(p_1) = p_1 \}.$$

: undergruppe av $\mathrm{Sym}_0(P)$.

Hvert element i Γ er en rotasjon om aksen $\mathbb{R}p_1$ med rotasjonsvinkel $2\pi r/k$, hvor $r = 0, \cdots, k-1$.

$\Rightarrow |\Gamma| = k.$

For $i = 1, \dots, n$ finns det en symmetri $m \in Sym_0(P)$ slik at $m(p_1) = p_i$.

Hvis $\hat{m}$ er en annen slik symmetri, altså

$$\hat{m}(p_1) = p_i,$$

så er

$$m^{-1}\hat{m}(p_1) = p_1$$

$$\Leftrightarrow m^{-1}\hat{m} \in \Gamma \Leftrightarrow \hat{m} \in m\Gamma.$$

Dette viser at

$$f^{-1}(p_i) = m\Gamma.$$

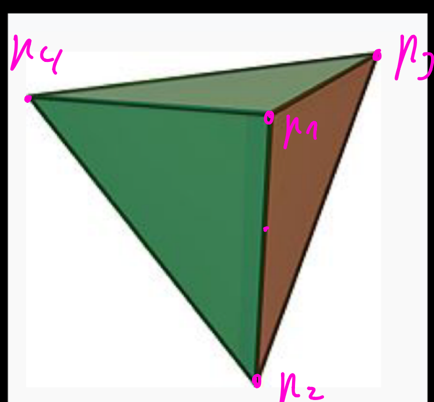
$$\Rightarrow |f^{-1}(p_i)| = |\Gamma| = k.$$

Men

$$\mathrm{Sym}_0(P) = \coprod_{i=1}^{n} f^{-1}(p_i)$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Sym}_0(P)| = n \cdot k. \quad //$$

<u>Teorem</u> Tetraedergruppa $\mathbb{T}$ er isomorf med den alternerende gruppa A_4.



$$\mathbb{T} = \mathrm{Sym}_0(\Delta_4)$$

<u>Bevis</u> Vi kan anta Δ_4 har sentrum i origo. La $p_1, \dots, p_4$ være hjørnene i

tetraedent Δ_4. Enhver symmetri av Δ_4 gir en permutasjon av hjørnene, altså et element av den symmetriske gruppa S_4. Dette definerer en gruppe-homomorfi

$$\varphi : \mathrm{Sym}(\Delta_4) \to S_4.$$

Siden hjørnene utspenner hele $\mathbb{R}^3$, er φ injektiv. Vi vil nå vise at φ er surjektiv. La π være planet som går gjennom punktene $0, v_3, v_4$, og la $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være speilingen i π.

Da er m en symmetri av Δ_4 som

bytter om p_1 og p_2 og holder p_3 og p_4 i ro.

$\Rightarrow \varphi(m)$ er transposisjonen som bytter om 1 og 2.

Siden ethvert element i S_4 er et produkt av transposisjoner, er

$$\varphi : \mathrm{Sym}(\Delta_4) \to S_4$$

surjektiv. Altså er φ en isomorfi.

Ethvert element $\sigma \in A_4$ er et produkt av et jevnt antall transposisjoner, så

$$\sigma = \varphi(m_1)\varphi(m_2)\cdots\varphi(m_{2r})$$

$$= \varphi(m_1 m_2 \cdots m_{2r})$$

for passende speilinger $m_1, \dots, m_{2r}$.

Hver speiling m_i er orienteringsreverserende,

så $m = m_1 m_2 \cdots m_{2r}$ er orienterings-

bevarende, dvs. $m \in \mathrm{Sym}_0(\Delta_4) = \mathbb{T}$.

$\Rightarrow A_4 = \varphi(\mathbb{T})$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}(\Delta_4) & \xrightarrow{\varphi} & S_4 \\ \cup & & \cup \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\approx} & A_4 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Avbildningen

$$\mathbb{T} \to A_4, \quad m \mapsto \varphi(m)$$

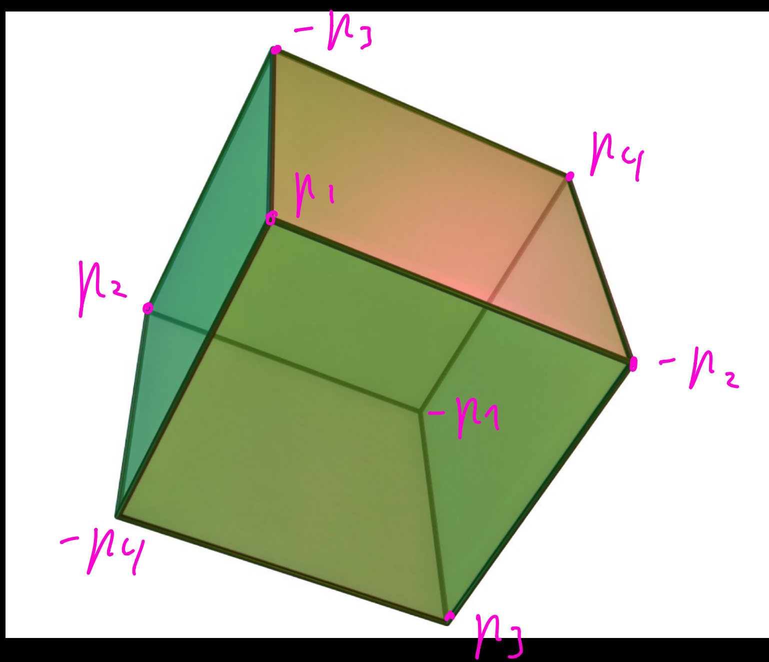
er en isomorfi. //

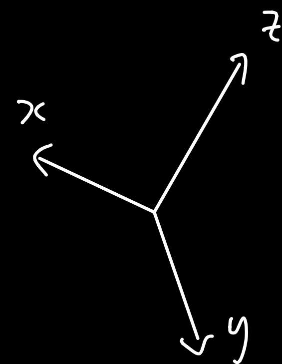
<u>Sjekker</u>: $|A_4| = \frac{4!}{2} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2} = 12$

$$|\mathbb{T}| = 4\cdot 3 = 12.$$

Teorem Oktaedergruppa $\mathbb{O}$ er isomorf med den symmetriske gruppa S_4.

$\square_6$





Bevis Vi benytter at $\mathbb{O} = \mathrm{Sym}_0(\square_6)$.

La

$$p_1 = (1,1,1), \quad p_2 = (1,-1,-1),$$

$$p_3 = (-1,1,-1), \quad p_4 = (-1,-1,1),$$

og la $\square_6$ være kuben med hjørner

$\pm p_i$, $i = 1, \dots, 4$. Enhver symmetri av kuben vil permutere de fire diagonalene

$L_1, \dots, L_4$, hvor

L_i = linjen gjennom p_i og $-p_i$.

Dette gir en gruppehomomorfi

$$\varphi : D = \mathrm{Sym}_0(D_6) \to S_4.$$

Vi vil nå vise at φ er surjektiv.

La $m : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved $m(x) = Ax$,

hvor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da er m en orienteringsbevarende

symmetri av kuben, og

$$m(p_1) = -p_2, \quad m(p_2) = -p_1,$$

$$m(p_3) = -p_3, \quad m(p_4) = -p_4.$$

$\Rightarrow$ m bytter om diagonalene L_1 og L_2 og holder L_3 og L_4 i ro.

En symmetribetraktning viser at enhver transposisjon i S_4 ligger i bildet til φ. Siden S_4 er generert av transposisjoner, er φ surjektiv. Men

$$|O| = 6 \cdot 4 = 24 = 4! = |S_4|,$$

så φ er en isomorfi. //

Mer om tetraeder- og oktaedergruppene.

Gruppa A_4 har 3 elementer av orden 2, nemlig

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 \tau_2 = \tau_2 \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Undergruppa

$$H = \{ Id, \tau_1, \tau_2, \tau_1\tau_2 \}$$

er isomorf med $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, hvor

τ_1 svarer til $([1],[0])$

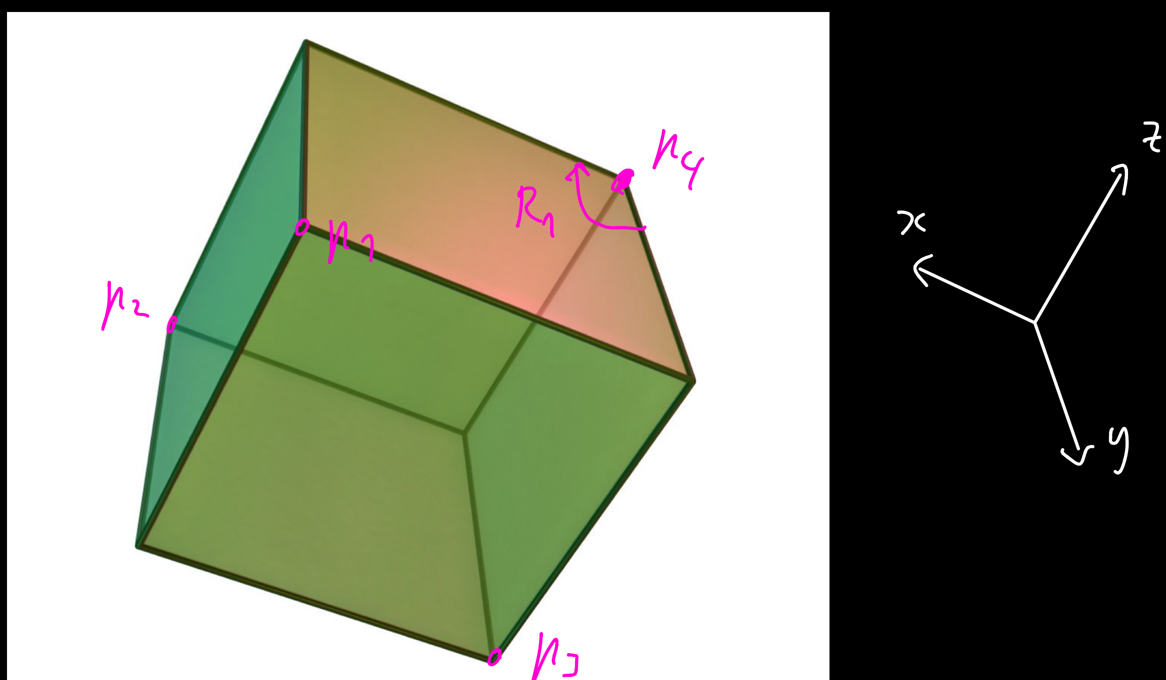
τ_2 — " — $([0],[1])$.

Oppgave: A_4 er generert av de to elementene

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi har $\rho_1 \rho_2 = \tau_1, \quad \rho_2 \rho_1 = \tau_2$.

Siden $\rho_1 \rho_2 \neq \rho_2 \rho_1$, er A_4 ikke abelsk



$$p_1 = (1,1,1), \quad p_2 = (1,-1,-1),$$

$$p_3 = (-1,1,-1), \quad p_4 = (-1,-1,1).$$

For $i \neq j$ er $\|p_i - p_j\| = 2\sqrt{2}$, altså danner $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ hjørnene i et regulært tetraeder Δ_4.

<u>Prop</u>: (i) Enhver orienteringsbevarende symmetri av Δ_4 er også en symmetri av Δ_6, altså er $\mathbb{T}$ en undergruppe av $\mathbb{O}$.

(ii) $\varphi: \mathbb{T} \xrightarrow{\cong} A_4$ er restriksjonen av $\psi: \mathbb{O} \xrightarrow{\cong} S_4$.

<u>Bevis</u>: (i) La $R_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være rotasjonen med akse $\mathbb{R}p_4$ og vinkel $-2\pi/3$.

Matrisen til $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

R_1 bevarer D_6: Ok.

$R_1 p_1 = p_2$, $R_1 p_2 = p_3$, $R_1 p_3 = p_1$,

$R_1 p_4 = p_4$.

$\Rightarrow$ R_1 bevarer tetraedent Δ_4, og

$$\varphi(R_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \rho_1 \in A_4$$

La $R_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være rotasjonen med akse $\mathbb{R}p_1$ og vinkel $2\pi/3$.

Matrisen til $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

R_2 er en orienteringsbevarende symmetri av både Δ_4 og D_6, og

$$R_2 p_1 = p_1, \quad R_2 p_2 = p_3, \quad R_2 p_3 = p_4,$$
$$R_2 p_4 = p_2$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(R_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \rho_2$$

Siden $\mathbb{T}$ er generert av R_1 og R_2, følger det at $\mathbb{T}$ er en undergruppe av $\mathbb{O}$.

(ii) $\psi(R_i) = \varphi(R_i), \quad i = 1, \dots, 4$

$\Rightarrow \psi = \varphi$ på hele $\mathbb{T}$. //