Mer om indreprodukt (fra 6.2)

Eks: P_1 = vektorrommet av alle polynomer $f(x) = ax + b$, hvor $a, b \in \mathbb{R}$.

Vi betrakter P_1 med indreproduktet

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2([0,1])} = \int_0^1 f_1(x) f_2(x)\, dx$$

Merk: Hvis $f(x) = ax + b$ og

$$\int_0^1 f(x)^2\, dx = 0$$

må $f(x) = 0$ for $0 \leq x \leq 1$

og dermed $a = b = 0$.

La $f_1(x) = a_1 x + b_1$

$f_2(x) = a_2 x + b_2$.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^1 (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2)\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[a_1 a_2 x^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) x + b_1 b_2 \right] dx$$

$$= \frac{1}{3} a_1 a_2 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1) + b_1 b_2$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Egenverdiene til A er:

$$\frac{4 \pm \sqrt{13}}{6} \quad : \text{ positive.}$$

Vi kan identifisere P_1 med $\mathbb{R}^2$ ved avbildningen

$$P_1 \to \mathbb{R}^2, \quad ax+b \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

og indreproduktet $\langle \cdot , \cdot \rangle_{L^2([0,1])}$ svarer da til $\langle \cdot , \cdot \rangle_A$ på $\mathbb{R}^2$.

<u>En ortonormert basis for P_1:</u>

Vi skriver $\langle \cdot , \cdot \rangle = \langle \cdot , \cdot \rangle_{L^2([0,1])}$.

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1 \cdot 1 \, dx = 1 \quad \Rightarrow \quad \|1\| = 1.$$

Hvis $f(x) = ax + b$, er

$$\langle 1, f \rangle = \int_0^1 1 \cdot (ax+b) \, dx$$

$$= \frac{a}{2} + b$$

Altså: $1 \perp (ax+b) \iff a = -2b.$

$$\|2x-1\|^2 = \int_0^1 (2x-1)^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 (4x^2 - 4x + 1) \, dx$$

$$= \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow \quad \|2x-1\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

$\Rightarrow \quad \|\sqrt{3}\cdot(2x-1)\| = 1$

<u>Konklusjon</u>: $\{1, \sqrt{3}\cdot(2x-1)\}$

er en ortonormert basis

for P_1.

6.4 Fourier-rekker

<u>Def</u>: En funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sies å være <u>periodisk</u> med periode $T > 0$ ($= T$-periodisk) dersom

$$f(x+T) = f(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}$.

<u>Eksempler</u>: (i) En konstant funksjon er T-periodisk for alle $T > 0$.

(ii) cos, sin er 2π-periodiske.

Lemma Hvis $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er T-periodisk og kontinuerlig, og $a, b \in \mathbb{R}$, så er

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx.$$

Bevis: Kan anta $a \le b$.

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x+T)\,dx$$

$$\underset{\substack{u = x+T \\ du = dx}}{=} \int_{a+T}^{b+T} f(u)\,du = \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$$

$$\int_a^{a+T} f + \int_{a+T}^{b+T} f = \int_a^{b+T} f = \int_a^b f + \int_b^{b+T} f$$

$$\Rightarrow \int_b^{b+T} f - \int_a^{a+T} f = \int_{a+T}^{b+T} f - \int_a^b f = 0. //$$

Def: $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ = vektorrommet av alle 2π-periodiske funksjoner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er uendelig mange ganger deriverbare.

Indreprodukt på $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) \, dx.$$

La $D : C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}) \to C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$

være derivasjonsoperatoren, dvs.

$$(Df)(x) = f'(x).$$

<u>Prop</u>: $\langle Df, g\rangle = -\langle f, Dg\rangle$ for alle $f, g \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$.

<u>Bevis</u>: For $h \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ er

$$\int_{-\pi}^{\pi} h'(x)\,dx = h(\pi) - h(-\pi) = 0.$$

La $h = fg$. Da er

$$h' = f'g + fg'.$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)g(x)\,dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g'(x)\,dx$$

$$= \langle Df, g\rangle + \langle f, Dg\rangle. \;//$$

<u>Korollar</u>: $\langle D^2 f, g\rangle = \langle f, D^2 g\rangle$,

dvs. D^2 er en "formelt symmetrisk" operator.

<u>Bevis</u>: $\langle D^2 f, g\rangle = -\langle Df, Dg\rangle$

$$= \langle f, D^2 g\rangle. \;//$$

<u>Prop</u>: E verdien til D^2 er

$\{0, -1, -4, -9, \dots\} = \{-n^2 \mid n \geq 0\}$.

Egenrommet til $-n^2$ består av alle funksjoner

$$a\cos(nx) + b\sin(nx) \quad (a, b \in \mathbb{R}).$$

Bevis: Anta f er en egenfunksjon til D^2 med

$$f'' = \lambda f, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

(i) $\lambda = 0$. Da må

$$f(x) = c_1 x + c_2, \qquad c_i \in \mathbb{R}.$$

f periodisk $\Rightarrow$ $c_1 = 0$, dvs f konstant.

$$f(x) = c_2 \cos(nx), \quad n = 0.$$

(ii) $\lambda = r^2 > 0$. Da er

$$f(x) = c_1 e^{rx} + c_2 e^{-rx}.$$

Fordi f er periodisk, må $f = 0$.

(iii) $\lambda = -r^2 < 0$. Da er

$$f(x) = c_1 \cos(rx) + c_2 \sin(rx).$$

Fordi f er 2π-periodisk, må r være et helt tall. (Oppgave!)

//

Def: En funksjon $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kalles

* jevn dersom $f(-x) = f(x)$ for alle x.
* odde dersom $f(-x) = -f(x)$ for alle x.

Eks: cos er jevn,
sin er odde.

Lemma Hvis en odde funksjon f er integrerbar over et intervall $[-a, a]$, $a > 0$, så er $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Bevis: $$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx$$

$$\underset{\substack{u=-t.\\ du=-dt}}{=} \int_{a}^{0} f(u)\,du = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f = 0. \quad //.$$

Prop: For alle hele tall $m, n \geq 0$ gjelder

(i) $$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\sin(nx)\,dx = 0.$$

(ii) Hvis $m \neq n$, er

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = 0.$$

Bevis: (i) Fordi $\cos(mx)\sin(nx)$ er odde.

(ii) Fordi D^2 er formelt symmetrisk og $\cos(mx)$, $\cos(nx)$ er egenfunksjoner som svarer til forskjellige egenverdier, må

$$\cos(mx) \perp \cos(nx).$$

Tilsvarende må $\sin(mx) \perp \sin(nx)$.
(Jfr. det tilsvarende resultat for symmetriske matriser.)

//.

Prop: For $n \neq 0$ er

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \pi$$

Bevis: $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos(2x) + 1\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(2nx) + 1\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n}\sin(2nx) + x\right]_{x=-\pi}^{x=\pi}$$

$$= \pi.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \cos^2(nx)\right)dx$$

$$= 2\pi - \pi = \pi. \quad //$$

<u>Prop</u>: La

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

hvor $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Da er

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

<u>Bevis</u>: Følger av de to siste proposisjonene. //

Def: En slik funksjon f kalles et <u>trigonometrisk polynom</u>.

Def: La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en 2π-periodisk funksjon som er integrerbar over $[-\pi, \pi]$. Da defineres <u>Fourier-koeffisientene</u> til f ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

<u>Fourier-rekken</u> til f er

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right).$$

Spørsmål: Konvergerer denne rekken mot $f(x)$?