Mer om Fourier-rekker

Def: La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en 2π-periodisk funksjon som er integrerbar over $[-\pi, \pi]$. Da defineres Fourier-koeffesientene til f ved

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx.$$

Fourier-rekken til f er

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Def La f, a_n, b_n være som ovenfor. Den N-te partialsummen til Fourier-rekka er

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Teorem Hvis

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx < \infty$$

så gjelder

$$\|f - S_N f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) - S_N f(x)\right)^2 dx$$

$\to 0$ når $N \to \infty$.

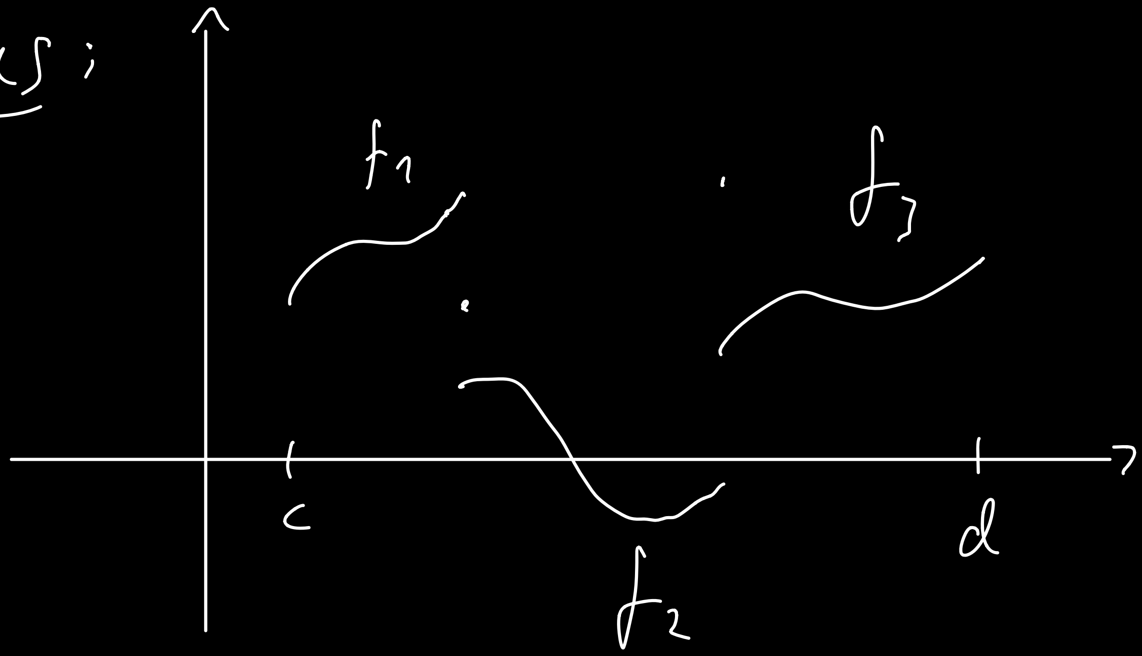
<u>Bevis</u>: Utelatt.

<u>Def</u> En funksjon $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ kalles <u>stykkevis kontinuerlig deriverbar</u> hvis det fins en partisjon

$$c = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_k = d$$

og for hver $i = 1, \ldots, k$ en kontinuerlig deriverbar funksjon f_i på $[c_{i-1}, c_i]$ slik at $f = f_i$ på (c_{i-1}, c_i).

Eks:



Teorem La $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en 2π-periodisk funksjon som er stykkevis kontinuerlig deriverbar på intervallet $[-\pi, \pi]$. Hvis f har Fourier-koeffisienter a_n, b_n, så gjelder

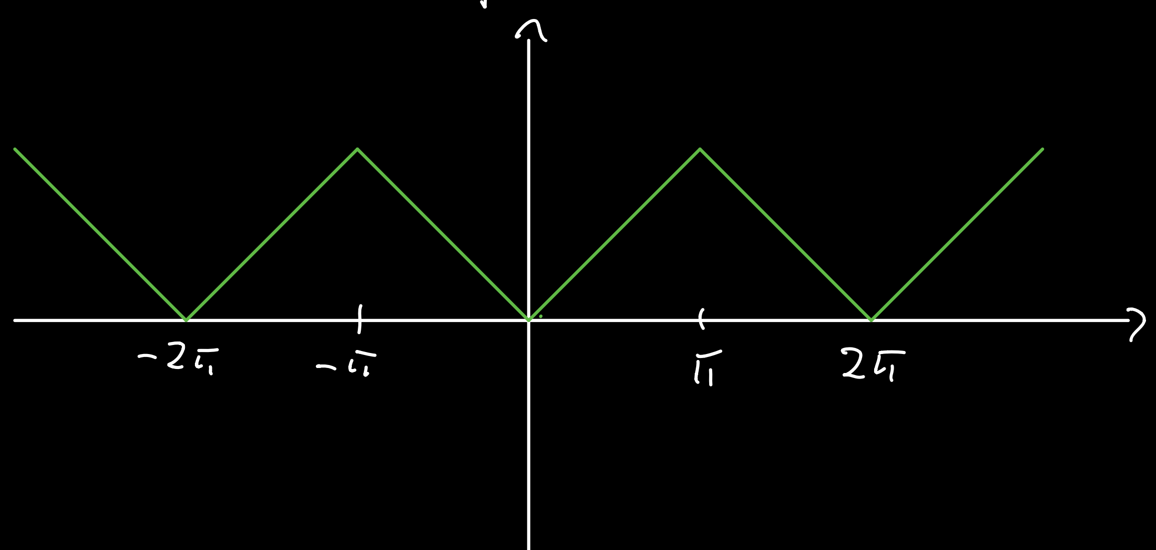
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

for alle punkter x hvor f er kontinuerlig.

<u>Bevis</u>: Utelatt.

<u>Eks</u>: La f være den 2π-periodiske funksjonen med

$$f(x) = |x| \quad \text{for} \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$



Siden f er en jevn funksjon, er $b_n = 0$ for alle n. Videre er

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

For $n \geq 1$:

$$\frac{\pi}{2} \cdot a_n = \int_{0}^{\pi} x \cdot \cos(nx)\, dx$$

$$= \frac{x}{n} \sin(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx)\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ jevn} \\ -\frac{2}{n^2}, & n \text{ odde.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ jevn} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & n \text{ odde.} \end{cases}$$

Siden f er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$ og stykkevis kontin. deriverbar på $[-\pi, \pi)$, er

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos\left((2k-1)x\right)}{(2k-1)^2}$$

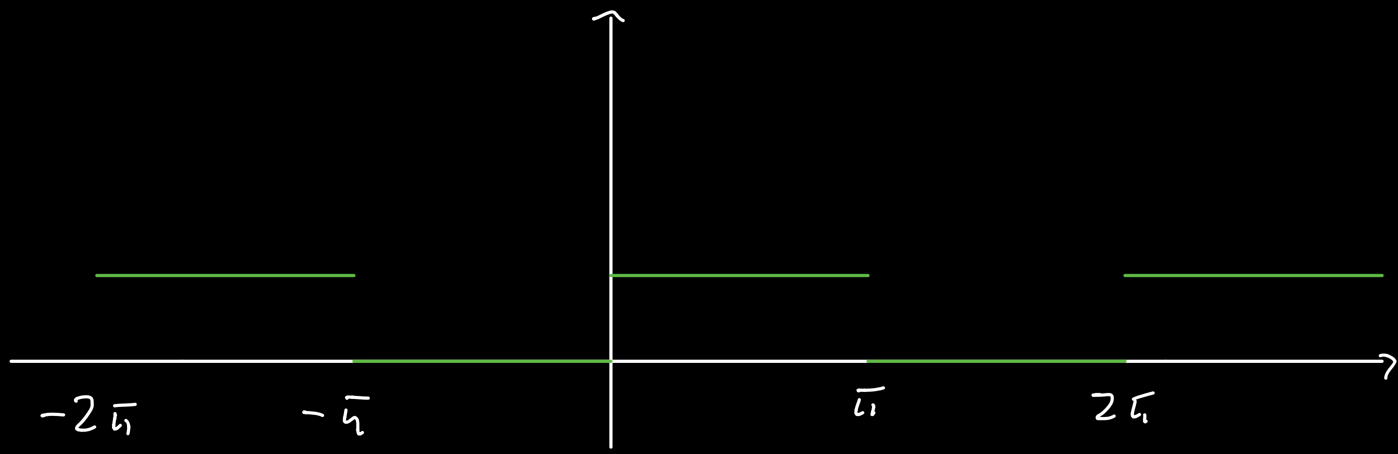
for alle $x \in \mathbb{R}$. For $x = 0$ får vi

$$0 = f(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots$$

<u>Eks</u>: La f være den 2π-periodiske funksjonen med

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\underbrace{\cos(0\cdot x)}_{1}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx = 1.$$

For $n \geq 1$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(nx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi}$$

$$= 0.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(nx)\, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \cos(nx) \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi n} \left((-1)^n - 1 \right)$$

$$= \begin{cases} 0, & n \text{ jevn} \\ \frac{2}{\pi n}, & n \text{ odd.} \end{cases}$$

Siden $f|_{[-\pi,\pi)}$ er stykkevis kontinuerlig deriverbar, er

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

for alle reelle tall x som ikke er på formen $x = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Spesielt er for $x = \frac{\pi}{2}$:

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right)}{2k-1}$$

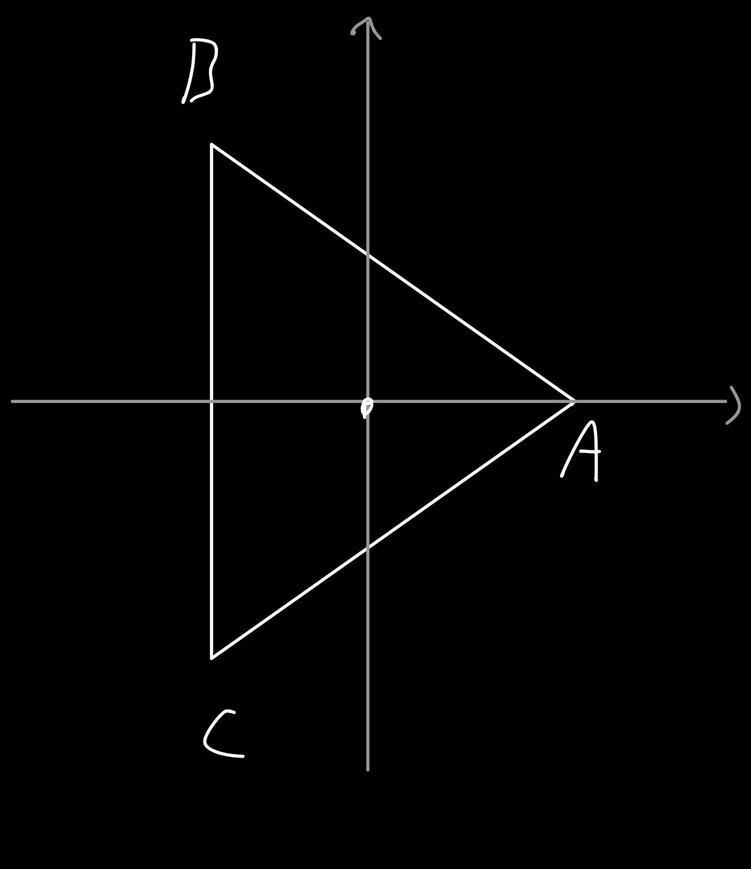
Siden $\sin\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(k\pi)$
$= (-1)^{k+1}$,

er

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

7.1 Symmetrigrupper

<u>Eks</u>: Symmetrigruppa til en likesidet trekant T.



$A = (1, 0)$

$B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ρ = rotasjonen om origo
med vinkel $\frac{2\pi}{3}$

Matrisen til $\rho = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Orienteringsbevarende symmetrier
av T:

$$\mathrm{Id}, \rho, \rho^2.$$

μ = speiling om x-aksen

Matrisen til $\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Hvis $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en orienteringsreverserende symmetri av T, så er $m\mu$ orienterings-bevarende, så

$$m\mu = \rho^i, \quad i \in \{0,1,2\}.$$

$$\Rightarrow \quad m = \rho^i \mu$$

De orienteringsreverserende symmetriene til T er derfor

$$\mu, \ \rho\mu, \ \rho^2\mu.$$

Tilsammen:

$$Sym(T) = \{Id, \rho, \rho^2, \mu, \rho\mu, \rho^2\mu\}$$

som mengde.

$$\mu f = ?$$

Vi vet at $\mu f = f^i \mu$ for en $i \in \{0, 1, 2\}$. Da er

$$\mu f \mu = f^i$$

Vi bestemmer i:

$$\mu f \mu (A) = \mu f (A)$$

$$= \mu (B) = C$$

$$= f^2 (A)$$

Siden $\mu\rho\mu$ og ρ^2 begge er orienteringsbevarende, må

$$\mu\rho\mu = \rho^2$$

$$\Rightarrow \quad \mu\rho = \rho^2\mu.$$

Dermed er multiplikasjonen i $\mathrm{Sym}(T)$ fullstendig bestemt:

$$\mathrm{Sym}(T) = \langle \rho, \mu \mid \rho^3 = \mu^2 = \mathrm{Id}, \; \mu\rho = \rho^2\mu \rangle$$

= den symmetriske gruppa S_3.

Eksempel på bruk av relasjonane

$$\mu^3\rho^2\mu\rho^4 = \mu\rho^2\mu\rho = \mu\rho^2\cdot\rho^2\mu$$

$$= \mu\rho\mu = \rho^2\mu\cdot\mu = \rho^2.$$