Isometrier i planet

Kim A. Frøyshov

Det fins fire typer isometrier i planet: Translasjoner, rotasjoner, speilinger og glidespeilinger. Vi vil nå beskrive disse.

1 Translasjoner

Den enkleste type isometrier er translasjonene. Gitt en vektor $\mathbf{u}$ i planet er translasjonen $T_{\mathbf{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definert ved

$$T_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}$$

for alle punkter $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

2 Rotasjoner

La p være et punkt i planet og θ et reelt tall. *Rotasjonen* om p med rotasjonsvinkel θ er avbildningen $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$R(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + A(\mathbf{x} - \mathbf{p}),$$

hvor A er rotasjonsmatrisen

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Vi ser at vinkelen $\theta + 2\pi k$ gir samme rotasjon for alle hele tall k. Hvis $A \neq I$ (hvor I er identitetsmatrisen), så består fikspunktmengden til R kun av punktet p, som da kalles *rotasjonssenteret* til R.

3 Speilinger

La L være en linje i planet. Vi kan beskrive L ved å angi et punkt p på L og en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ parallell med L. Da er

$$L = \{\mathbf{p} + t\mathbf{u} \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Speilingen (eller *refleksjonen*) i linja L er avbildningen $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + A(\mathbf{x} - \mathbf{p}),$$

hvor A er speilingsmatrisen som oppfyller $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$. For å beskrive A eksplisitt velger vi en normalvektor til L, altså en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ slik at skalarproduktet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. Da er A lik Housholder-matrisen til $\mathbf{v}$, altså

$$A = I - \frac{2}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}\mathbf{v}^T,$$

hvor $\mathbf{v}$ oppfattes som søylevektor. Siden $A\mathbf{v} = -\mathbf{v}$, er

$$S(\mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}) = \mathbf{p} + s\mathbf{u} - t\mathbf{v}$$

for alle reelle tall s, t. Da $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ er en basis for $\mathbb{R}^2$, kan ethvert punkt i planet uttrykkes på formen $\mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ for passende reelle tall s, t, så dette gir en fullstendig beskrivelse av speilingen S.

4 Glidespeilinger

La L være en linje i planet og $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en vektor parallell med L. *Glidespeilingen* langs L med translasjonsvektor $\mathbf{u}$ er avbildningen $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$G(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) + \mathbf{u},$$

hvor S er speilingen i L. Lar vi igjen A være speilingsmatrisen med $A\mathbf{u} = \mathbf{u}$, får vi den eksplisitte formelen

$$G(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{u}.$$

Mens $S(S(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$, er det tilsvarende ikke riktig for glidespeilingen G. Vi har isteden

$$G(G((\mathbf{x})) = \mathbf{p} + \mathbf{u} + A(A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + \mathbf{u}) = \mathbf{x} + 2\mathbf{u},$$

hvor vi har brukt at $A^2 = I$. Dette viser at translasjonsvektoren $\mathbf{u}$ er entydig bestemt av G.

5 Klassifikasjon av isometrier i planet

Fikspunktmengden til en isometri $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er definert ved

$$\mathcal{F}_m = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; m(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\}.$$

En isometri m kalles *ikke-triviell* dersom det fins en $\mathbf{x}$ slik at $m(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$, dvs. dersom fikspunktmengden ikke er lik hele $\mathbb{R}^n$.

Teorem 1 *Enhver ikke-triviell isometri* $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *er av nøyaktig én av følgende typer:*

- *Translasjon, med* $\mathcal{F}_m = \emptyset$ *(den tomme mengde).*
- *Rotasjon om et punkt* p*, med* $\mathcal{F}_m = \{\mathbf{p}\}$*.*
- *Speiling om en linje* L*, med* $\mathcal{F}_m = L$*.*
- *Glidespeiling langs en linje, med* $\mathcal{F}_m = \emptyset$*.*