MAT1060 V21

Løsningsforslag til oblig1

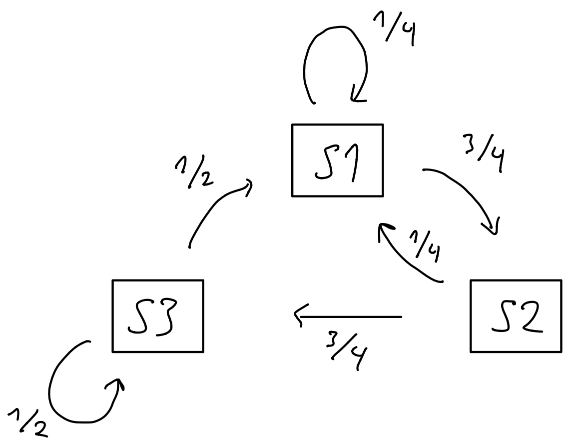
Oppgave 1.

(i) Vi betrakter det dynamiske systemet med overgangsmatrise

$$A = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Tegn et boks-diagram som illustrerer dette systemet.

Løsning:



(ii) Er A en stokastisk matrise? Finn alle likevektstilstander for systemet.

Løsning: A er en stokastisk matrise siden alle elementene er ikke-negative og alle søylesummene er lik 1. En likevektstilstand er en vektor v slik at $Av = v$, eller ekvivalent, $(A - I)v = 0$. Vi regner ut

$$4(A - I) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ er altså en likevektstilstand hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} -3x + y + 2z &= 0, \\ 3x - 4y &= 0, \\ 3y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Legger vi den andre likningen til den første, får vi

$$\begin{aligned} -3y + 2z &= 0, \\ 3x - 4y &= 0, \\ 3y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Vi ser at den siste likningen er overflødig, og at vi får nøyaktig en løsning for hver verdi av y, nemlig

$$x = \frac{4}{3}y, \quad z = \frac{3}{2}y.$$

Egenrommet til egenverdien 1 har derfor dimensjon 1 og har vektoren $\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ som basis.

(iii) Regn ut det karakteristiske polynomet til A.

Løsning: Som vist i forelesningen er

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \operatorname{tr}(A)\lambda^2 - \frac{1}{2}((\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)) + \det(A).$$

Vi regner ut

$$A^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 3 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{tr}(A) = \frac{3}{4}, \quad \operatorname{tr}(A^2) = \frac{11}{16}, \quad \det(A) = \frac{3}{16},$$

så

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda + \frac{3}{16}.$$

(iv) Bestem alle reelle egenverdier til A.

Løsning: Vi vet fra punkt (ii) at 1 er en root i det karakteristiske polynomet. Polynomdivisjon gir nå

$$\chi_A(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{3}{16}).$$

Polynomet $\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{3}{16}$ har ingen reelle røtter, så 1 er den eneste reelle egenverdien til A.

(v) Regn ut den inverse matrisen A^{-1}. Er A^{-1} en stokastisk matrise?

Løsning: Vi setter inn i formelen fra forelesningen og får

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)}\left(A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \frac{1}{2}((\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)) \cdot I)\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4/3 & 0 \\ -2 & 2/3 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi ser at alle søylesummene er lik 1, men fordi noen av elementene er negative, er A^{-1} ikke noen stokastisk matrise.

(vi) La

$$v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vis at $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Løsning: $\mathcal{B}$ er en basis hvis og bare hvis matrisen med søyler v_1, v_2, v_3 har determinant ulik 0, og

$$\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 - (-1) \cdot 6 + 1 \cdot (-9) = 5.$$

(vii) La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den lineære avbildningen gitt ved $T(v) = Av$. Finn matrisen til T relativt til basisen $\mathcal{B}$.

Løsning: Vi finner

$$\begin{aligned} Av_1 &= v_1, \\ Av_2 &= \frac{1}{4}(-3v_2 + 3v_3), \\ Av_3 &= \frac{1}{4}(-3v_2 + 2v_3). \end{aligned}$$

Matrisen til T relativt til basisen $\mathcal{B}$ er derfor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/4 & -3/4 \\ 0 & 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(viii) Bruk python til å beregne $A^{100}v_2$ og $A^{100}v_3$ numerisk. (En utskrift av beregningen skal inkluderes i besvarelsen.)

Løsning: Svaret er i begge tilfeller 0, se helt nederst i løsningsforslaget.

Oppgave 2.

(i) Vis at $\mathcal{B} = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ er en lineært uavhengig mengde av funksjoner.

Løsning: Anta a, b, c er reelle tall slik at

$$ae^x + bxe^x + cx^2e^x = 0 \quad \text{for alle reelle tall } x.$$

Fordi $e^x \neq 0$, må polynomet

$$p(x) = a + bx + cx^2$$

forsvinne for alle x. Det samme må gjelde for de deriverte p' og p'', så

$$a = p(0) = 0, \quad b = p'(0) = 0, \quad c = \frac{1}{2}p''(0) = 0.$$

Dette viser at $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig.

(ii) La V være vektorrommet generert av disse funksjonene, dvs.

$$V = \{ae^x + bxe^x + cx^2e^x \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

La $D : V \to V$ være den lineære avbildningen som sender en funksjon på dens deriverte. Finn matrisen til D relativt til basisen $\mathcal{B}$.

Løsning: Vi har

$$\begin{aligned} De^x &= e^x, \\ D(xe^x) &= e^x + xe^x, \\ D(x^2e^x) &= 2xe^x + x^2e^x. \end{aligned}$$

Matrisen til D er derfor

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 3.

(i) Bestem rangen til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Løsning: Vi har

$$\det(A) = 3(28-6) + (-6)(4-(-7)) = 0,$$

så A har ikke maksimal rang. På den annen side er

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-7) = 11 \neq 0,$$

så de to første søylene A_1, A_2 er lineært uavhengige. Rangen til A er derfor 2.

(ii) Finn en basis for søylerommet til A.

Løsning: $\{A_1, A_2\}$ er en basis for søylerommet.

In [1]:
```
from numpy import *
```

In [2]:
```
A = array([[.25,.25,.5],[.75,0,0],[0,.75,.5]])
A
```

Out[2]:
```
array([[0.25, 0.25, 0.5 ],
       [0.75, 0.  , 0.  ],
       [0.  , 0.75, 0.5 ]])
```

In [5]:
```
v2 = array([-1.,1.,0.])
v2
```

Out[5]:
```
array([-1.,  1.,  0.])
```

In [6]:
```
v3 = array([-1.,0.,1.])
v3
```

Out[6]:
```
array([-1.,  0.,  1.])
```

In [8]:
```
B = linalg.matrix_power(A,100)
B
```

Out[8]:
```
array([[0.34782609, 0.34782609, 0.34782609],
       [0.26086957, 0.26086957, 0.26086957],
       [0.39130435, 0.39130435, 0.39130435]])
```

In [10]:
```
dot(B,v2)
```

Out[10]:
```
array([0., 0., 0.])
```

In [11]:
```
dot(B,v3)
```

Out[11]:
```
array([0., 0., 0.])
```

In [ ]: