MAT1060 V21

Løsningsforslag til oblig2

Oppgave 1. La S være speilingen (=refleksjonen) av planet i linja

$$x + 2y = -1,$$

og la S' være speilingen av planet i linja

$$2x - y = 3.$$

(i) Sammensetningen $R = S \circ S'$ er en rotasjon av planet (som vist i forelesningene). Finn rotasjonssenteret og –vinkelen til R.

Løsning: La L og L' betegne linjene $x + 2y = -1$ og $2x - y = 3$, henholdsvis. Siden $w = (1, 2)$ og $w' = (2, -1)$ er normalvektorer til L og L', og $w \cdot w' = 0$, står linjene normalt på hverandre. Senteret for rotasjonen $R = S \circ S'$ er snittet mellom linjene, som er $p = (1, -1)$. For å bestemme rotasjonsvinkelen er det tilstrekkelig å regne ut $R(q)$ for hvilket som helst punkt $q \neq p$. Vi velger $q \in L'$. Da står $a = q - p$ normalt på L, så

$$R(p + a) = S(S'(p + a)) = S(p + a) = p - a.$$

Det betyr at R er rotasjonen om p med vinkel π.

(ii) Er $S' \circ S = S \circ S'$?

Løsning: Argumentet i (i) benyttet kun at linjene L og L' står normalt på hverandre og snitter hverandre i punktet p. Vi får derfor det samme resultat om vi bytter om rekkefølgen av S og S'. Altså er $S' \circ S = S \circ S'$.

Oppgave 2. La R være rotasjonen av planet som holder punktet $(2, -1)$ fast og sender $(5, 0)$ på $(1, 2)$.

(i) Uttrykk R på formen

$$R(x) = Ax + b,$$

hvor A er en ortogonal 2×2 matrise og $b \in \mathbb{R}^2$.

Løsning: La

$$p = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$v_1 = q_1 - p = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = q_2 - p = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Siden R er en rotasjon med sentrum p, fins det en rotasjonsmatrise A slik at

$$R(p+v) = p + Av \quad \text{for alle } v \in \mathbb{R}^2.$$

Vi har

$$p + v_2 = q_2 = R(q_1) = R(p + v_1) = p + Av_1,$$

så $v_2 = Av_1$. Siden v_1 og v_2 står normalt på hverandre, må A representere en rotasjon med vinkel $\pm\pi/2$, så

$$A = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ved å sette inn i likningen $Av_1 = v_2$ finner vi at

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dette gir

$$R(x) = p + A(x - p) = Ax + (I - A)p,$$

så

$$b = (I - A)p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(ii) Bestem rotasjonsvinkelen til R.

Løsning: Vi har

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

med $\theta = \pi/2$. Derfor er R en rotasjon med vinkel $\pi/2$.

Oppgave 3. La m være isometrien av rommet representert ved matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hva slags isometri er m? Bestem fikspunktmengden til m.

Løsning: Vi har

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Siden $A \neq I$, er m en rotasjon om en linje gjennom origo. Denne linjen er også fikspunktmengden $\mathcal{F}_m$. For å bestemme $\mathcal{F}_m$ løser vi likningen

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

som er ekvivalent med

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,$$

altså

$$\begin{aligned} x - z &= 0, \\ x + y &= 0, \\ y + z &= 0. \end{aligned}$$

Den siste likningen er overflødig, siden den er differensen mellom den andre og den første likningen. Derfor er $\mathcal{F}_m = \mathbb{R}w$, hvor

$$w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4. Vi betrakter ortogonale 3×3 matriser A som har determinant 1 og er forskjellige fra identitetsmatrisen I. Skriv en funksjon $\mathrm{rot}(A)$ i Python/NumPy som returnerer et par w, t slik at A representerer en rotasjon om linjen $\mathbb{R}w$ med vinkel t. Her er et forslag til algoritme:

- Hvis Frobenius-normen $\|A - I\| < 10^{-9}$, skal funksjonen terminere med meldingen "Funksjonen er ikke definert for identitetsmatrisen".
- Finn en egenverdi h til A slik at $|h - 1| < 10^{-10}$. La $w = (w_1, w_2, w_3)$ være en tilhørende egenvektor med norm 1.
- Velg en indeks j slik at $|w_j| < 0.6$. La $v_0 = e_j \times w$ (kryssprodukt), hvor e_j er den $j$te basisvektor for $\mathbb{R}^3$. Sett $v = v_0/\|v_0\|$ og $u = v \times w$.
- La $p = Au \cdot u$ og $q = Au \cdot v$ (skalarprodukt). La $a = \arccos(p)$. Sett

$$t = \begin{cases} a & \text{hvis } q \geq 0, \\ -a & \text{hvis } q < 0,. \end{cases}$$

- Returner paret w, t.

Test funksjonen på eksempelet i Oppgave 3.

Løsning: Se neste side.

In [29]:
```
import numpy as np
I = np.eye(3)
```

In [30]:
```
def rot(A):
    if np.linalg.norm(A-I) < 10**(-9):
        print("Funksjonen er ikke definert for identitetsmatrise
n")
    else:
        ever, evek = np.linalg.eig(A)
        i=0
        while np.abs(ever[i]-1) >= 10**(-10):
            i=i+1
        w = evek[:,i]
        j=0
        while np.abs(w[j]) >= 0.6:
            j=j+1
        v0 = np.cross(I[j],w)
        v = v0 / np.linalg.norm(v0)
        u = np.cross(v,w)
        Au = np.dot(A,u)
        p = np.dot(Au,u)
        q = np.dot(Au,v)
        a = np.arccos(p)
        if q >= 0:
            t = a
        else:
            t = -a
        return w,t
```

In [37]:
```
rot(I)
```

```
Funksjonen er ikke definert for identitetsmatrisen
```

In [38]:
```
A = np.array([[0,0,1],[-1,0,0],[0,-1,0]])
A
```

Out[38]:
```
array([[ 0,  0,  1],
       [-1,  0,  0],
       [ 0, -1,  0]])
```

In [39]:
```
w,t = rot(A)
```

In [40]:
```
v = np.array([1,-1,1])
w - v/np.sqrt(3)
```

Out[40]:
```
array([-2.22044605e-16+0.j, -1.11022302e-16+0.j, -2.22044605e-16+
0.j])
```

In [41]:
```
t + 2*np.pi/3
```

Out[41]:
```
0j
```

In [ ]:
```
```