MAT1060 V21

Løsningsforslag til ordinær eksamen

Oppgave 1. Vi er gitt to vektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er lineært uavhengig.

Løsning:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{10k}.$$

Da $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$, er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er lineært uavhengig.

b Finn en vektor $\mathbf{v}_3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Løsning: La $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$. Da er

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \|\mathbf{v}_3\|^2 = 105 \neq 0,$$

altså er $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ lineært uavhengig og dermed en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 2. Vi betrakter linja L i planet gitt ved likningen $x - 3y = 4$.

a La S være speilingen i linja L. Uttrykk S på formen

$$S(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

hvor A er en ortogonal 2×2 matrise og $\mathbf{b}$ en vektor.

Løsning: Vektoren $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ er en normalvektor for linja L. Matrisen A er Householder-matrisen til $\mathbf{v}$, altså

$$A = \frac{1}{v_1^2 + v_2^2} \begin{pmatrix} v_2^2 - v_1^2 & -2v_1v_2 \\ -2v_1v_2 & v_1^2 - v_2^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Punktet $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ligger på L. Det gir

$$S(\mathbf{x}) = \mathbf{p} + A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = A\mathbf{x} + (I - A)\mathbf{p}.$$

Vi regner ut

$$(I - A)\mathbf{p} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$$

og får dermed

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

b Gi et eksempel på en glidespeiling G langs L. Uttrykk G på formen

$$G(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$$

for en passende matrise C og vektor $\mathbf{d}$.

Løsning: Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ er parallell med L. Derfor er

$$G(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) + \mathbf{u} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 19 \\ -7 \end{pmatrix}$$

et eksempel på en glidespeiling langs L.

Oppgave 3.

Vi betrakter matrisen

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

a Vis at A er en ortogonal matrise.

Løsning: A er ortogonal dersom $A^TA = I$. Vi har

$$A^TA = A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}\begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = I.$$

b Finn alle vektorer $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Hva slags isometri representerer A?

Løsning: Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ er ekvivalent med $(9A - 9I)\mathbf{x} = 0$. Vi har

$$9A - 9I = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -4 \\ 8 & -8 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Siden alle radene i den siste matrisen er proporsjonale med vektoren $(2, -2, 1)$, finner vi at

$$A\mathbf{x} = \mathbf{x} \Longleftrightarrow 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Matrisen A representerer derfor speilingen i planet som går gjennom origo og står normalt på vektoren $(2, -2, 1)$.

Oppgave 4. Vi betrakter et trekantet prisme P hvor endeflatene er likebeinte, men ikke likesidede, trekanter; se figuren nedenfor. Beskriv symmetrigruppa til P inklusiv de orienteringsreverserende symmetriene. Er denne gruppa abelsk?

Løsning: Vi velger et koordinatsystem hvor P har hjørner

$$(0, 0, \pm b), \quad (1, a, \pm b), \quad (1, -a, \pm b),$$

hvor $a, b > 0$. Vi antar $a \neq 1/\sqrt{3}$, slik at endeflatene er likebeinte, men ikke likesidede, trekanter.

La $G = \mathrm{Sym(P)}$ være symmetrigruppa til P. De symmetriene som sender endeflatene på seg selv, danner en undergruppe H med ett ikke-trivielt element, nemlig speilingen σ_1 i xz-planet. Et eksempel på en symmetri som bytter om endeflatene, er speilingen σ_2 i xy-planet. Hvis τ er en vilkårlig symmetri som bytter om endeflatene, vil $\tau\sigma_2^{-1} \in H$. Altså er

$$G = H \cup H\sigma_2 = \{\mathrm{Id}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2\}.$$

Matrisene til σ_1 og σ_2 er henholdsvis

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Det fjerde elementet $\sigma_1\sigma_2$ har matrise

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Derfor er $\sigma_1\sigma_2$ rotasjonen om x-aksen med rotasjonsvinkel π.

Siden $A_1A_2 = A_2A_1$, gjelder $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$. Altså er G en abelsk gruppe.