Litt om plangeometri

<u>Lemma</u> La A være en ortogonal 2×2 matrise med $\det(A) = 1$, altså $A \in SO(2)$. Hvis A har en reell egenverdi, så må $A = \pm I$.

<u>Bevis</u> Vi har $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

for passende $\theta \in \mathbb{R}$. Da er $\operatorname{tr}(A) = 2\cos\theta$,

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\cos\theta \cdot \lambda + 1.$$

λ kompleks egenverdi for A

$$\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$$

$$\iff \lambda^2 - 2\cos\theta \cdot \lambda + \cos^2\theta = \cos^2\theta - 1$$

$$\iff (\lambda - \cos\theta)^2 = -\sin^2\theta = (i \cdot \sin\theta)^2$$

$$\iff \lambda - \cos\theta = \pm i \cdot \sin\theta$$

$$\iff \lambda = \cos\theta \pm i \cdot \sin\theta$$

A har altså komplekse egenverdier

$$\lambda_1 = e^{i\theta}, \quad \lambda_2 = e^{-i\theta}.$$

Hvis λ_1 eller λ_2 er reell, så må

$\sin\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \pm 1 \Rightarrow A = \pm I.$ //

<u>Korollar</u>: Hvis $A \in SO(2)$ og 1 er en egenverdi, så er $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

Teorem Hvis m_1 og m_2 er isometrier av planet slik at

entem m_1 og m_2 er begge orienteringsbevarende

eller —— " —— orient. reverserende.

Hvis det fins to punkter $p, q \in \mathbb{R}$ slik at

$$m_1(p) = m_2(p), \quad m_1(q) = m_2(q),$$

så er $m_1 = m_2$.

Bevis: La $R = m_2^{-1} \circ m_1$. Da er R orient. bevarende, og

$$R(p) = p, \quad R(q) = q.$$

Vi har $R(x) = Ax + v$

hvor $A \in SO(2)$, $v \in \mathbb{R}^2$. Siden

$$Ap + v = p$$

$$Aq + v = q$$

$$\Rightarrow \quad A(p-q) = p-q.$$

Da $p - q \neq 0$, er 1 en egenverdi for A, så $A = I$. Det gir

$$p = Ap + v = p + v \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

Altså er $R = Id$, $m_1 = m_2$. //

<u>Hint til Oppgave 1 på Oblig 2:</u>

<u>Metode 1</u>: Uttrykk speilingene S, S' på formen

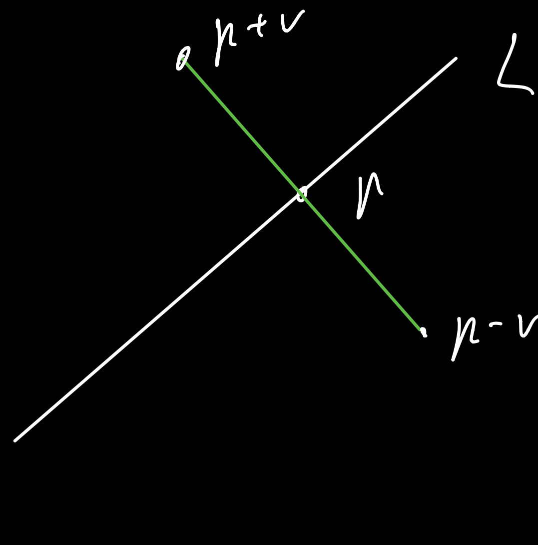
$$S(x) = Ax + v$$

$$S'(x) = Ax + v'.$$

Regn ut $S \circ S'$, $S' \circ S$.

Metode 2: (ii) Vis at linjene står normalt på hverandre. La p være rotasjons-senteret. Velg et punkt q slik at $S(S'(q))$ er enkel å regne ut.

Husk: Generelt, hvis S er speilingen i en linje L, $p \in L$, og vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ står normalt på L,



så er

$$S(p+v) = p - v.$$