23. februar 2022

MAT1060

Obligatorisk oppgave 1 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 10. mars 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Alle delspørsmålene teller like mye. For å få godkjent besvarelsen trengs det minst 50% av maksimal uttelling.

Oppgave 1. Vi betrakter det dynamiske systemet med overgangsmatrise

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.8 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

(i) Tegn et boks-diagram som illustrerer dette systemet.

(ii) Finn en likevektstilstand $\mathbf{v}$ til systemet som er normalisert slik at komponentsummen til $\mathbf{v}$ er 1.

(iii) Regn ut potensene A^{10} og A^{100}, f.eks. ved hjelp av Python. (Koden skal tas med i besvarelsen.)

(iv) La $\mathbf{w}$ være en vektor i $\mathbb{R}^3$ med komponentsum 1. Begrunn ved en sammenligning av svarene i (ii) og (iii) hvorfor $A^n\mathbf{w}$ vil nærme seg $\mathbf{v}$ når n vokser, uavhengig av hva $\mathbf{w}$ er.

Oppgave 2. Vi betrakter matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Finn det karakteristiske polynomet til A.

(ii) Regn ut egenverdiene til A.

(iii) Finn en basis for $\mathbb{R}^2$ som består av egenvektorer til A.

Oppgave 3. La

$$\mathcal{P}_n = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

være vektorrommet av alle reelle polynomer av grad høyst n. Vi betrakter den lineære avbildningen

$$T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$$

definert som følger. Hvis $p(x)$ er et element i $\mathcal{P}_1$, så er $Tp(x)$ elementet i $\mathcal{P}_2$ som er gitt ved

$$Tp(x) = \int_0^x p(t)\,dt.$$

Bestem matrisen til T med hensyn på basisen $\{1, x\}$ for $\mathcal{P}_1$ og basisen $\{1, x, x^2\}$ for $\mathcal{P}_2$.

Oppgave 4. Vi ser på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Uttrykk den siste søylen til A som en lineær kombinasjon av de to første søylene.

(ii) Bestem rangen til A.

Oppgave 5. La

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(i) Vis at mengden $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ er lineært uavhengig.

(ii) Finn en vektor $\mathbf{v}_3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.