21. april 2022

MAT1060

Obligatorisk oppgave 2 av 2

Innleveringsfrist

Torsdag 5. mai 2022, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Alle delspørsmålene teller like mye. For å få godkjent besvarelsen trengs det minst 50% av maksimal uttelling.

Oppgave 1. La

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(i) Finn en orienteringsbevarende isometri $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at

$$m(\mathbf{e}_1) = \mathbf{p}, \quad m(\mathbf{e}_2) = \mathbf{q}.$$

Uttrykk m på formen

$$m(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{v},$$

hvor A er en ortogonal 2×2 matrise og $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$. Forklar hvorfor m er en rotasjon, og bestem rotasjonsvinkel og –sentrum.

Hint: Betrakt $m(\mathbf{e}_1) - m(\mathbf{e}_2)$.

(ii) Finn en orienteringsreverserende isometri $m' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at

$$m'(\mathbf{e}_1) = \mathbf{p}, \quad m'(\mathbf{e}_2) = \mathbf{q}.$$

Uttrykk m' på formen

$$m'(\mathbf{x}) = A'\mathbf{x} + \mathbf{v}',$$

hvor A' er en ortogonal 2×2 matrise og $\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^2$. Vis at m' er en glidespeiling og bestem speilingslinje og translasjonsvektor.

(iii) Forklar hvorfor m og m' er entydig bestemt.

Oppgave 2. Hva slags isometri av $\mathbb{R}^3$ representerer matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

Oppgave 3. La V være vektorrommet av alle reelle annengradspolynomer, dvs. vektorrommet utspent av funksjonene

$$f(x) = 1, \quad g(x) = x, \quad h(x) = x^2.$$

Vi lar V ha indreproduktet

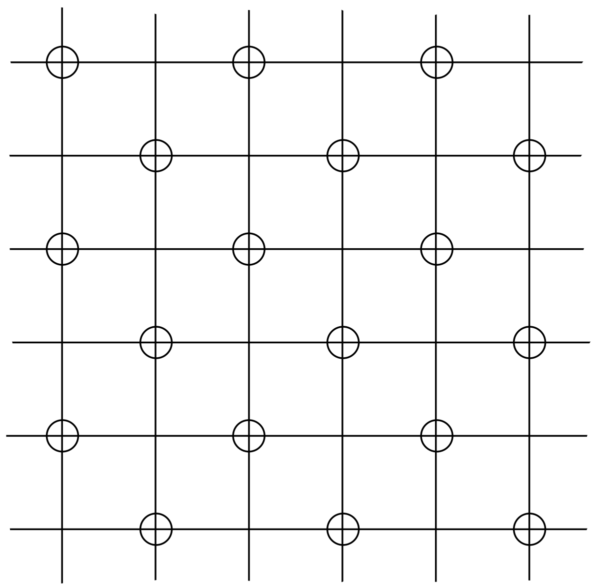
$$\langle p, q \rangle = p(-1) \cdot q(-1) + p(0) \cdot q(0) + p(1) \cdot q(1)$$

for $p, q \in V$.

(i) Vis at g står ortogonalt på både f og h.

(ii) Finn en ortonormert basis for V.

Oppgave 4. Figuren nedenfor viser et utsnitt av en krystallstruktur $\mathcal{M}$ i planet.



(i) Tegn inn en enhetscelle for $\mathcal{M}$.

(ii) Har $\mathcal{M}$ noen rotasjonssymmetri? Hva er i så fall den maksimale orden til en slik symmetri?

(iii) Har $\mathcal{M}$ noen speilingssymmetri? Marker i så fall speilingslinjen til en slik symmetri.