Torsdag 27. april 2023

Symmetrigrupper:

1. Skalarprodukt av vektorer
1. Cauchy-Schwartz ulikhet, trekantulikheten, parallelloven, polariserings-identiteten
1. Generell definisjon, indreprodukt
2. Indreprodukt ved symmetrisk matrise
2. Indreprodukt mellom symmetriske matriser
2. Indreprodukt i funksjonsrom
2. Indreprodukt som integral

Cauchy-Schwartz ulikhet; For alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ gjelder

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

Trekantulikheten: For alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gjelder

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$$

Parallellogram-loven: For alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gjelder

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 = 2\|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{w}\|^2$$

Polariserings-identiteten: For alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ gjelder

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2\right)$$

Definisjon. *La V være et reelt vektorrom. Et **indreprodukt** på V er en regel som til et hvert par av elementer i V tilordner et reelt tall;*

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \in \mathbb{R}$$

slik at følgende betingelser er oppfylt:

i) Symmetrisk; $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$

ii) Lineært; $\langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$,

iii) Positivt definit; $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ *med likhet hvis og bare hvis* $\mathbf{v} = 0$.

Vanlig skalarprodukt:

$$(v_1, v_2, \ldots, v_n)\dot{(}w_1, w_2, \ldots, w_n) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T (w_1, w_2, \ldots, w_n)$$

Indreprodukt ved symmetrisk matrise:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_A = \mathbf{v}^T A \mathbf{w}, \quad A \text{ en symmetrisk matrise.}$$

Indreprodukt av symmetriske matriser:

$$\langle A, B \rangle_{n \times n} = \operatorname{tr}(A^T B)$$

Indreprodukt av integrerbare funksjoner over et intervall I:

$$\langle f(x), g(x) \rangle_{\int} = \int_a^b f(x) g(x) \, dx$$