Prøveeksamen i MAT 1100, H-03

Denne prøveeksamenen har samme format som den virkelige eksamenen og inneholder oppgaver av samme type og vanskelighetsgrad. Første del av eksamen består av 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Dersom du svarer feil eller lar være å krysse av på en oppgave, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen består av tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. Den totale poengsummen er altså 100 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

KALKULATOR ER ENESTE TILLATTE HJELPEMIDDEL PÅ EKSAMEN. FORMELARKET VIL BLI DELT UT SAMMEN MED OPPGAVESETTET!

DEL 1: FLERVALGSOPPGAVER

1. Integralet $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ er lik:

- ☐ $\ln(1+\sin^2 x)+C$
- ☐ $\cot(1+\sin^2 x)+C$
- ☐ $\arctan(\sin x)+C$
- ☐ $\arccos(\sin x)+C$
- ☐ $-\frac{1}{1+\sin x}+C$

2. Hvis $a>0$ er en konstant, så er $\int_0^2 x^{a-1}\,e^{x^a}\,dx$ lik:

- ☐ $\frac{1}{a}\left(e^{2^a}-1\right)$
- ☐ $2^a e^{2^a}$
- ☐ $\frac{1}{a}\left(e^{2a}-1\right)$
- ☐ integralet divergerer
- ☐ $\frac{e^{2^a}}{a}$

3. Dersom vi skal bruke delbrøkoppspalting på uttrykket $\frac{x^2+4x+5}{(x+1)(x^2+2x+5)^2}$, bør vi sette det lik:

- ☐ $\frac{Ax+B}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$
- ☐ $\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}$
- ☐ $\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+2x+5)^2}$
- ☐ $\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x^2+2x+5}+\frac{C}{(x^2+2x+5)^2}$
- ☐ $\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+5}+\frac{Dx+E}{(x^2+2x+5)^2}$

4. Når vi substituerer $u = \sqrt{x} + 1$ i integralet $\int_1^9 \arctan(\sqrt{x}+1)\,dx$, får vi:

- ☐ $\int_1^9 2(u-1)\arctan u\,du$
- ☐ $\int_2^4 \arctan u\,du$
- ☐ $\int_2^4 2(u-1)\arctan u\,du$
- ☐ $\int_1^9 \arctan u\,du$
- ☐ $\int_2^4 \frac{1}{2\sqrt{u}} \arctan u\,du$

5. Det uegentlige integralet $\int_e^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$:

- ☐ divergerer
- ☐ konvergerer og er lik $\frac{\pi}{2}$
- ☐ konvergerer og er lik 2
- ☐ konvergerer og er lik $\sqrt{5}$
- ☐ konvergerer og er lik 4

6. Den deriverte til funksjonen $F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt$, $x > 0$, er lik:

- ☐ eksisterer ikke fordi integralet ikke lar seg regne ut
- ☐ e^x
- ☐ e^{x^2}
- ☐ eksisterer ikke fordi integralet divergerer
- ☐ $\frac{e^x}{2\sqrt{x}}$

7. Gradienten til $f(x,y) = x^2e^{-xy}$ er:

- ☐ $(2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy}, 2xe^{-xy} - x^3e^{-xy})$
- ☐ $(-2xye^{-xy}, -x^3e^{-xy})$
- ☐ $(2xe^{-xy}, x^2e^{-xy})$
- ☐ $(2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy}, -x^3e^{-xy})$
- ☐ $(2xe^{-xy} - x^2ye^{-xy}, x^2e^{-xy})$

8. Når $f(x,y) = 2xy + y^2$, $\mathbf{a} = (1,2)$ og $\mathbf{r} = (3,-1)$ er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a},\mathbf{r})$ lik:

- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ -4
- ☐ 3
- ☐ 6
- ☐ $-\frac{17}{4}$

9. Når vi står i punktet (1,-3), stiger funksjonen $f(x,y) = 3x^2y + xy$ raskest i retningen:

- ☐ $(1,2)$
- ☐ $(-18,4)$
- ☐ $(3,-4)$
- ☐ $(-21,4)$
- ☐ $(-7,1)$

10. Grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ er lik:

☐ 0
☐ 2
☐ ∞
☐ eksisterer ikke fordi vi får forskjellige svar når vi nærmer oss 0 fra forskjellige retninger
☐ $-\frac{1}{2}$

DEL 2

Husk at i denne delen må alle svar begrunnes!

Oppgave I. Finn kvadratrøttene til det komplekse tallet $z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Oppgave II. Løs integralet $\int x \ln(x+1)\, dx$.

Oppgave III. Funksjonen f er gitt ved $f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy$.
a) Finn de stasjonære punktene til f.
b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkter, lokale minimumspunkter eller sadelpunkter.

Oppgave IV.
a) La a være et tall mellom 0 og 5. Området avgrenset av x-aksen, y-aksen, grafen til funksjonen $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ og linjen $x = a$ dreies om x-aksen. Finn volumet til omdreiningslegemet uttrykt ved a.
b) En kuleformet tank med radius 5 meter tømmes for vann. Når vanndybden i tanken er 2 meter, tømmes tanken med en fart på 0.5 kubikkmeter i minuttet. Hvor fort avtar vanndybden ved dette tidspunktet?

Oppgave V. En funksjon f av én variabel kalles en *Lipschitz-funksjon* på intervallet I dersom det finnes et tall K slik at $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ for alle $x, y \in I$. Vis først at dersom f er en Lipschitz-funksjon på intervallet I, så er f kontinuerlig på I. Vis deretter følgende påstand:

"Dersom den deriverte g' er kontinuerlig på et lukket, begrenset intervall I, så er g en Lipschitz-funksjon på I."

LYKKE TIL!