"Prøveunderveiseksamensløsningsforslag" i MAT 1100, H-03

1. *Den deriverte til* $f(x) = \arcsin(x^2)$ *er:*
Vi bruker kjerneregelen: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

2. *Den deriverte til* $f(x) = x^2 \cot x$ *er:*
Vi bruker produktregelen:$f'(x) = 2x \cot x + x^2(-\frac{1}{\sin^2 x}) = 2x \cot x - \frac{x^2}{\sin^2 x}$

3. *Det komplekse tallet* $\frac{1-i}{1+2i}$ *er lik:*
Ganger med den konjugerte til nevneren oppe og nede:

$$\frac{1-i}{1+2i} = \frac{(1-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1-2i-i+2i^2}{1^2-(2i)^2} = \frac{1-2i-i-2}{1+4} = \frac{-1-3i}{5}$$

4. *Polarkoordinatene til det komplekse tallet* $-4+4i$ *er:*
Vi har $r = \sqrt{(-4)^2+4^2} = 4\sqrt{2}$ og $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Siden $-4+4i$ ligger i annen kvadrant, er $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

5. *Polarkoordinatene til et komplekst tall er* $r = 4, \theta = \frac{5\pi}{6}$. *Tallet er:*
$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = 4\cos\frac{5\pi}{6} + i4\sin\frac{5\pi}{6} = 4(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 4i\frac{1}{2} = -2\sqrt{3} + 2i$

6. *Det komplekse tallet* $e^{i\pi/3} \cdot \overline{(1+i)}$ *er lik:*
$e^{i\pi/3} \cdot \overline{(1+i)} = (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})(1-i) = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})(1-i) =$
$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) + \frac{i}{2}(\sqrt{3}-1)$

7. *Det* reelle *polynomet* $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ *har* i *og* $3i$ *som røtter. Den reelle faktoriseringen til P(z) er:*
Siden polynomet er reelt, vil de komplekskonjugerte til røttene, $\bar{i} = -i$ og $\overline{3i} = -3i$, også være røtter. Dermed er

$$P(z) = (z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i) = (z^2+1)(z^2+9)$$

8. *Grenseverdien* $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x}{7x-3x^3}$ *er lik:*
Dividerer med den høyeste potensen x^3 oppe og nede (dette er raskere enn å bruke L'Hopitals regel):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x}{7x-3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}}{\frac{7}{x^2}-3} = -\frac{1}{3}$$

9. *Grenseverdien* $\lim_{x\to 0} x\cot(2x)$ *er lik:*
Bruker vi definisjonen av cot og at $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1$, får vi:

$$\lim_{x\to 0} x\cot(2x) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos 2x}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Oppgaven kan også løses ved å skrive om $\lim_{x\to 0} x\cot(2x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cot(2x)}{\frac{1}{x}}$ og så bruke L'Hopitals regel.

10. *Grenseverdien* $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{3x}$ *er lik:*
Vi skriver om: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{3x} = \lim_{x\to\infty}(e^{\ln(1+\frac{2}{x})})^{3x} = \lim_{x\to\infty} e^{3x\ln(1+\frac{2}{x})}$, og tar så en liten mellomregning ved hjelp av L'Hopitals regel:

$$\lim_{x\to\infty} 3x\ln(1+\frac{2}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{3\ln(1+\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{(1+\frac{2}{x})}(-\frac{2}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{(1+\frac{2}{x})}(-2)}{-1} = 6$$

Dermed er $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x})^{3x} = \lim_{x\to\infty} e^{3x\ln(1+\frac{2}{x})} = e^6$.

11. *Grenseverdien* $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})$ *er lik:*
Ganger med det konjugerte uttrykket over og under brøkstreken:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{2}$$

12. *For hvilket tall* a *er funksjonen* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & \textit{hvis } x \neq 0 \\ a & \textit{hvis } x = 0 \end{cases}$ *kontinuerlig?*
Vi ser at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$. Skal funksjonen være kontinuerlig i 0, må denne grensen være lik $f(0)$. Altså må $a = 2$

13. *Funksjonen* $f(x) = x^3 + 2x + 1$ *har en omvendt funksjon* f^{-1}. *Den deriverte* $(f^{-1})'(1)$ *er lik:*
Vi ser at $f(0) = 1$. Det betyr at $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$

14. *Når* $x \to \infty$, *har funksjonen* $f(x) = x(\sin(\frac{1}{x})+1)$ *asymptoten:*
Vi følger oppskriften i seksjon 6.5. Først ser vi på $\lim_{x\to\infty} \frac{x(\sin(\frac{1}{x})+1)}{x} = \lim_{x\to\infty}(\sin(\frac{1}{x})+1) = 1$. Det betyr at i en eventuell asymptote $y = ax + b$ er $a = 1$. Deretter ser vi på

$$\lim_{x\to\infty}(x(\sin(\frac{1}{x})+1)-x) = \lim_{x\to\infty} x(\sin(\frac{1}{x})) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

der vi har brukt substitusjonen $y = \frac{1}{x}$ (man kommer greit frem med L'Hopitals regel uten å bruke denne substitusjonen). Dermed er $y = x+1$ en asymptote.

15. *Integralet* $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$ *er lik:*
Vi setter $u = x^2$. Da er $du = 2xdx$ og

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C$$

16. *Det komplekse tallet* $(1+i)^{17}$ *er lik:*
Vi skal bruke De Moivres formel. Først skriver vi $z = (1+i)$ på polarform: $z = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$. Dermed er:

$$z^{17} = \sqrt{2}^{17} e^{\frac{17\pi}{4}i} = 2^{\frac{17}{2}} e^{4\pi i + \frac{\pi}{4}i} = 2^{\frac{17}{2}} e^{\frac{\pi}{4}i} =$$

$$= 2^{\frac{17}{2}}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = 2^{\frac{17}{2}}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2^8(1+i)$$

17. *Funksjonen* $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$ *er injektiv når vi begrenser definisjonsområdet til dette intervallet:*
Vi deriverer funksjonen for å se hvor den er voksende og avtagende: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$. Vi ser at f er voksende på $(-\infty, -1]$ og $[2, \infty)$, og avtagende på $[-1, 2]$. Det betyr at f er injektiv på $[-1, 2]$. (For å se at f ikke er injektiv på noen av de andre intervallene, observerer vi at de alle inneholder et (lokalt) topp- eller bunnpunkt i sitt indre).

18. *Du skal bruke definisjonen av konvergens til å vise at følgen* $\{a_n\}$ *gitt ved* $a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n}$ *konvergerer mot* 1. *Gitt* $\epsilon > 0$, *hvor stor må du velge* N *for at* $|a_n - 1| < \epsilon$ *for alle* $n \geq N$?
Vi ser at $|a_n - 1| = |\frac{n+\sqrt{n}}{n} - 1| = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Vi skal ha dette uttrykket mindre enn enn ϵ, dvs. $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$. Dette er ekvivalent med $n > \frac{1}{\epsilon^2}$. Vi må altså velge N større enn $\frac{1}{\epsilon^2}$

19. *Hvilken ulikhet gjelder for alle* $x \in (0, 1]$?
Vi bruker middelverdisetningen på funksjonen $f(x) = \arcsin x$ og intervallet $[0, x]$. Setningen sier da at det finnes en c, $0 < c < x$, slik at

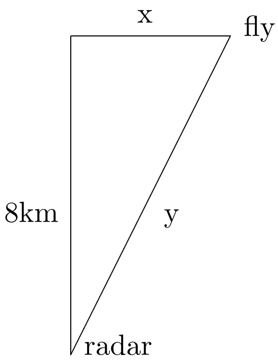
$$\frac{\arcsin x - \arcsin 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

Bruker vi at $\arcsin 0 = 0$ og at funksjonen $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ er voksende, ser vi at

$$\frac{\arcsin x}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ganger vi over x, får vi $\arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

20. *Et fly flyr i konstant høyde 8km over bakken. Avstanden til en radar på bakken er 10km og øker med 480km/t. Hvor fort flyr flyet?*



Figuren viser den generelle situasjonen. Ifølge Pythagoras er $y^2 = x^2 + 8^2$, dvs. $y^2 = x^2 + 64$. Deriverer vi begge sider mhp. t, får vi $2yy' = 2xx' + 0 = 2xx'$ Det betyr at $x' = \frac{yy'}{x}$. I det øyeblikket vi er interessert i, er $y = 10$km og $y' = 480$km/t. Siden $y^2 = x^2 + 64$, regner vi lett ut at $x = 6$km når $y = 10$km. Dermed får vi:

$$x' = \frac{yy'}{x} = \frac{10\text{km} \cdot 480\text{km/t}}{6\text{km}} = 800\text{km/t}$$