28. september, 2001

MAT 100A: Mappeeksamen 2

Skriftlig innleveringsfrist: 5/10-2001, kl. 15.00

Informasjon: Halvparten av studentene skal levere en skriftlig besvarelse av dette oppgavesettet (med innleveringsfrist som ovenfor), den andre halvparten vil presentere (deler av) sin besvarelse muntlig i uken 8/10-12/10. I begge tilfeller vil besvarelsen få en karakter som vil inngå i mappen. Senere i semesteret (mappeeksamen 5) bytter vi om på rollene slik at de som nå leverer skriftlig, da vil presentere muntlig og omvendt.
Skriftlig innlevering: Den skriftlige besvarelsen *skal* være håndskrevet av deg selv (med mindre du har fått tillatelse til å levere besvarelsen i en annen form) og skal leveres inn i tre eksemplarer (en original og to kopier). Der oppgaven ber deg om å bruke Maple, har du selvfølgelig lov til å levere Mapleutskrifter. Skriftlige besvarelser skal enten leveres direkte til gruppelærer eller på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje i Niels Henrik Abels hus). Husk å stifte besvarelsene!
Muntlig presentasjon: Når du skal presentere din besvarelse muntlig, velger du ut de tre oppgavene du helst vil presentere. Sensor trekker så én av disse oppgavene. Du har lov til å ha med deg skriftlige notater, og du bør ha med deg Mapleutskrifter der oppgavene ber om det.

Søknad om utsettelse: Studenter som blir syke eller av andre grunner ønsker å søke om utsettelse eller fritak fra denne eksamenen, må ta kontakt med Heidi M. Raude (rom B718 Niels Henrik Abels hus, telefon 22 85 59 01, e-post: heidimr@math.uio.no) så tidlig som mulig. Ved sykdom kreves det normalt legeattest. Foreleser og gruppelærere har ikke anledning til å gi utsettelse eller fritak.

Oppgave 1

a) Regn ut $(1-4i)(2+3i)$ og $\frac{1+3i}{2-i}$

b) Løs annengradsligningen $z^2 + (1-i)z - i = 0$.

c) Finn tredjerøttene til $-2+2i$ og skriv dem på formen $a+ib$.

Oppgave 2

I denne oppgaven er $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Regn ut $f'(x)$, $f''(x)$ og $f'''(x)$.

b) Bruk Maple til å tegne grafene til f'/f'' og f''/f''' (lag gjerne flere figurer dersom du synes det er nødvendig for å få et godt inntrykk av grafene). Hvordan ser det ut til å gå det med disse funksjonene når $x \to \infty$? Bekreft antagelsen din ved å finne grenseverdiene.

c) Bruk induksjon til å vise at for alle $n \in \mathbf{N}$ er $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{-x^2}$ der p_n er et polynom av n-te grad ($f^{(n)}$ betegner den n-te deriverte til f). OBS: Du behøver ikke finne en formel for p_n.

d) Forklar hvorfor $\lim_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = 0$ for alle $n \in \mathbf{N}$.

Oppgave 3

En dyrestamme med 6000 dyr lever i et begrenset område. Stammen har et årlig fødselsoverskudd på 6%. I år utvandrer a dyr fra stammen til andre områder, og dette tallet ventes å øke med 2% per år. Vi lar x_n betegne antall dyr i området etter n år.

a) Forklar hvorfor

$$x_{n+1} = 1.06x_n - 1.02^n a \qquad x_0 = 6000$$

b) Finn et uttrykk for x_n.

c) Bruk Maple til å illustrere utviklingen til dyrestammen gjennom de neste 50 år når a er lik henholdsvis 200 og 275.

d) For hvilke verdier av a vil dyrestammen forsvinne fra området og for hvilke vil den bestandig være der?

Oppgave 4

Ole påstår at dersom du slår en sirkel på et kart, vil det på denne sirkelen alltid være to diametralt motsatte punkter som har samme høyde over havet. Berit mener at dette umulig kan være riktig, og at hun har et moteksempel. Lag en liten historie der Ole og Berit begrunner sine synspunkter. Historien skal ende med at begge to innser at den andres argumenter har gitt dem en bedre forståelse av problemet.