12. oktober, 2001

MAT 100A: Mappeeksamen 2

Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Multipliserer ut det første uttrykket:

$$(1-4i)(2+3i) = 1\cdot 2 + 1\cdot 3i - 4i\cdot 2 - 4i\cdot 3i = 2 + 3i - 8i + 12 = 14 - 5i$$

For å utføre divisjonen, multipliserer vi med den konjugerte av nevneren over og under brøkstreken:

$$\frac{1+3i}{2-i} = \frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1\cdot 2 + i + 3i\cdot 2 + 3i\cdot i}{2^2 - i^2} = \frac{-1+7i}{5} = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$$

b) Vi kan bruke den vanlige formelen for røttene i en annengradsligning:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

forutsatt at vi tolker $\pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ som de to komplekse kvadratrøttene til $b^2 - 4ac$. Dermed har vi

$$x = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 - 4\cdot 1\cdot(-i)}}{2} = \frac{-1+i\pm\sqrt{2i}}{2}$$

Vi må nå finne kvadratrøttene til $2i$. Siden $2i = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$, får vi at kvadratrøttene til $2i$ er (husk at vi tar kvadratroten til modulusen og halverer argumentet)

$$w_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})) = 1 + i$$

og

$$w_1 = -w_0 = -1 - i$$

Innsatt i formelen ovenfor gir dette oss

$$x = \frac{-1+i\pm(1+i)}{2} = \begin{cases} i \\ -1 \end{cases}$$

Bemerkning: Det finnes også andre (og raskere!) måter å løse denne oppgaven på, men dette er den trygge "standardmetoden".

c) Vi skriver først $z = -2 + 2i$ på polarform:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Siden z ligger i annen kvadrant, betyr dette at $\theta = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ (dette kunne vi også ha sett direkte fra en figur siden $z = -2 + 2i$ deler andre kvadrant i to like store deler). Vi har dermed

$$z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

Vi finner den første tredjeroten w_0 ved å ta tredjeroten av modulus og tredjedelen av argumentet:

$$w_0 = (2\sqrt{2})^{1/3}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 1 + i$$

Den neste roten er gitt ved

$$w_1 = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = (1 + i)e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Legg merke til at jeg her velger ikke å skrive om $e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})}$ til formen $a + ib$. Det er fordi jeg da må regne ut $\sin\frac{11\pi}{12}$ og $\cos\frac{11\pi}{12}$. Isteden skriver jeg $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ på formen $a + ib$ (og får $e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$) og utfører multiplikasjonen:

$$w_1 = (1 + i)(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

Vi finner w_2 på tilsvarende vis ved å rotere 120° i motsatt retning:

$$w_2 = w_0e^{-i\frac{2\pi}{3}} = (1+i)(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} - i\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

(vi kunne like godt ha ganget w_1 med $e^{i\frac{2\pi}{3}}$, men det ville ha gitt litt styggere regninger.)

Oppgave 2

a) I den første derivasjonen bruker vi kjerneregelen:

$$f'(x) = e^{-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}$$

I den neste må vi kombinere kjerneregelen og produktregelen:

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$$

Den siste går på samme måte:

$$f'''(x) = 8xe^{-x^2} + (4x^2 - 2)e^{-x^2}(-2x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}$$

b) Ifølge grafene (se egen fil) ser det ut til at de to uttrykkene går mot null når x går mot uendelig. For å sjekke regner vi ut grenseverdiene. Vi bruker trikset med å faktorisere ut leddet med høyeste potens (det er også mulig å bruke L'Hôpitals regel):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{f''(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2xe^{-x^2}}{(4x^2 - 2)e^{-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{(4x^2 - 2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(-\frac{2}{x})}{x^2(4 - \frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x}}{4 - \frac{2}{x^2}} = 0$$

Tilsvarende får vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f''(x)}{f'''(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(4x^2 - 2)e^{-x^2}}{(-8x^3 + 12x)e^{-x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(4x^2 - 2)}{(-8x^3 + 12x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(\frac{4}{x} - \frac{2}{x^3})}{x^3(-8 + \frac{12}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{4}{x} - \frac{2}{x^3}}{-8 + \frac{12}{x^2}} = 0$$

c) Induksjonsantagelsen er:

$$P_n: \quad f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{-x^2} \text{ der } p_n \text{ er et polynom av } n\text{-te grad}$$

Siden $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, og $-2x$ er et polynom av første grad, er P_1 sann. For å fullføre induksjonsbeviset, er det derfor nok å vise at dersom P_k er sann, så er P_{k+1} også sann. Vi antar derfor at $f^{(k)}(x) = p_k(x)e^{-x^2}$ der p_k er et polynom av k-te grad. Deriverer vi dette uttrykket ved produktregelen, får vi:

$$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = (p_k(x)e^{-x^2})' =$$

$$= p_k'(x)e^{-x^2} - p_k(x)e^{-x^2}(-2x) = (p_k'(x) - 2xp_k(x))e^{-x^2}$$

Siden p_k er et polynom av k-te grad, er $-2xp_k$ er et polynom av $(k+1)$-te grad og $p_k'(x)$ et polynom av $(k-1)$-te grad. Det betyr at $p_k'(x) - 2xp_k(x)$ er et polynom av $k+1$-te grad. Altså er P_{k+1} sann, og beviset er fullført.

d) Vi har

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{p_n(x)e^{-x^2}}{p_{n+1}(x)e^{-x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{p_n(x)}{p_{n+1}(x)}$$

Her kan vi bruke samme triks som i punkt b) med å faktorisere ut den høyeste potensen. Dersom

$$p_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

og

$$p_{n+1}(x) = b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$$

får vi:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_{n+1}x^{n+1} + b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}(\frac{a_n}{x} + \frac{a_{n-1}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^n} + \frac{a_0}{x^{n+1}})}{x^{n+1}(b_{n+1} + \frac{b_n}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^n} + \frac{b_0}{x^{n+1}})} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{a_n}{x} + \frac{a_{n-1}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^n} + \frac{a_0}{x^{n+1}}}{b_{n+1} + \frac{b_n}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^n} + \frac{b_0}{x^{n+1}}} = 0$$

der vi har brukt at i det siste uttrykket går alle leddene mot 0 bortsett fra det første leddet b_{n+1} i nevneren.

Oppgave 3

a) Vi observerer først at siden antall dyr som utvandrer øker med 2% per år, vil det i det n-te året utvandre $1.02^n a$ dyr. Uten utvandringen ville dyrestammen ha økt fra x_n til $1.06x_n$ dyr (siden fødselsoverskuddet er 6%). Regner vi med utvandringen, får vi derfor at antall dyr etter $n+1$ år er gitt ved

$$x_{n+1} = 1.06x_n - 1.02^n a$$

Siden vi starter med 8000 dyr, er $x_0 = 6000$.

b) Ligningen ovenfor kan skrives som en førsteordens inhomogen differensligning

$$x_{n+1} - 1.06x_n = -1.02^n a$$

Den generelle løsningen er derfor gitt ved

$$x_n = x_n^h + x_n^p$$

der x_n^h er den generelle løsningen av den tilsvarende homogene ligningen og der x_n^p er en (partikulær) løsning av den inhomogene. Den homogene ligningen

$$x_{n+1} - 1.06x_n = 0$$

har generell løsning

$$x_n^h = C \cdot 1.06^n$$

For å finne den partikulære løsningen, tipper vi at den kan være på samme form som høyresiden i ligningen, dvs $x_n^p = A \cdot 1.02^n$ der A er en konstant vi må forsøke å bestemme. Vi setter inn i ligningen:

$$-a \cdot 1.02^n = x_{n+1}^p + x_n^p = A \cdot 1.02^{n+1} - 1.06 \cdot A \cdot 1.02^n = -0.04A \cdot 1.02^n$$

Skal dette stemme, må vi ha $-0.04A = -a$, dvs. $A = 25a$. Dermed har vi

$$x_n^p = 25a \cdot 1.02^n$$

Den generelle løsningen er dermed

$$x_n = C \cdot 1.06^n + 25a \cdot 1.02^n$$

Vi er interessert i løsningen med $x_0 = 6000$, og vi må da velge C slik at

$$6000 = x_0 = C \cdot 1.06^0 + 25a \cdot 1.06^0 = C + 25a$$

som gir $C = 6000 - 25a$. Antall dyr etter n år er dermed:

$$x_n = (6000 - 25a)1.06^n + 25a \cdot 1.02^n$$

c) Når a er lik 200, stiger funksjonen raskere og raskere. Når a er lik 275, stiger funksjonen til å begynne med, men begynner å avta etter en stund. Etter 50 år er bestanden nesten nede på null (figurene ligger på en egen fil).

Forskjellen i oppførsel skyldes at når $a = 200$, er både koeffisienten $6000-25a$ foran 1.06^n og koeffisienten $25a$ foran 1.02^n positiv. Når $a = 275$, er den første av disse koeffisientene negativ. Siden 1.06^n vokser fortere enn 1.02^n, betyr dette at uttrykket etterhvert begynner å avta. Siden koeffisienten foran 1.02^n er størst, er dette leddet viktigst i starten, og funksjonen begynner defor med å vokse.

d) Ifølge resonnementet i forrige punkt, går skillet der koeffisienten $6000 - 25a$ foran 1.06^n skifter fra positiv til negativ. Siden løsningen til ligningen $6000 - 25a = 0$ er $a = 240$, går skillet ved denne verdien. Dette betyr at dyrestammen dør ut i området dersom $a > 240$, mens den forblir i området til evig tid dersom $a \leq 240$. Hvis du fortsatt er i tvil om dette resonnementet er tilstrekkelig, kan du forsøke å løse ligningen $(6000 - 25a)1.06^n + 25a \cdot 1.02^n = 0$ (med n som ukjent). Da vil du se at ligningen har en løsning dersom $6000 - 25a$ er negativ, men ikke ellers.

Oppgave 4

Utkast til besvarelse følger på de neste sidene.

Et Mattehjem

av Fenrik Gibson

Første og eneste akt

(*Kjøkkenet hos Berit og Ole. Ved kjøkkenbordet i forgrunnen sitter Berit bøyd over en kladdebok mens hun biter i blyanten. I bakgrunnen synger Ole for seg selv mens han vasker opp).*

OLE: Vet du hva jeg oppdaget i dag?
BERIT: (*mumler uinteressert*) Nei. Hva da?
OLE: At dersom du slår en sirkel på et kart, så vil det alltid finnes to diametralt motsatte punkter på sirkelen med samme høyde over havet!
BERIT: Jaså? (*Våkner plutselig og ser opp*) Men du kan ikke ha bevist *det*!
OLE: Og hvorfor ikke, tør jeg spørre?
BERIT: Fordi det ikke er sant!
OLE: (*uforstående*) Og hvorfor ikke?
BERIT: Fordi jeg har et moteksempel! Se her skal jeg vise deg. (*Hun griper en saks og et papirark og klipper raskt ut en sirkelskive. Så kutter hun et snitt fra sirkelperiferien inn til sentrum. Deretter bøyer hun litt på sirkelskiven slik at de to snittkantene spriker og sirkelperiferien blir til en spiral.*) Se her! Langs denne sirkelperiferien har alle pinktene forskjellig høyde over havet, og derfor kan ikke to diametralt motsatte punkter ha samme verdi.
OLE: (*opphisset*). Det er sant det du sier om punktene, men det der er ikke noe landskap — det er jo et digert hull der du klippet. Det finnes ikke sånne hull i den virkelige verden!
BERIT: (*rolig*) Men det behøver ikke være et hull! Hvis jeg tetter det igjen med en loddrett vegg, blir det til et stup, og det finnes vel selv i din verden? Eksemplet fungerer like godt for det.
OLE: Det ser faktisk ut som du har rett. (*Klør seg i hodet*). Men hvordan kan jeg ha bevist teoremet mitt da?
BERIT: (*overlegen*) Du gjorde vel en feil som vanlig. Det er ikke første gang!
OLE: Jeg vet det, men denne gang sjekket jeg alt ekstra grundig.
BERIT: (*vennligere*) Få se på beviset ditt, da.
(*Ole setter sed ned ved siden av henne og begynner å skrive og tegne i kladdeboken hennes.*)
OLE: Her er sirkelen, og nå legger jeg inn et aksekors med origo i sentrum til denne sirkelen. La oss starte på x-aksen og gå langs sirkelperiferien til vi har dreiet en vinkel x. Kall høyden over havet i dette

punktet for $h(x)$, og kall høyden over havet i det diametralt motsatte punktet for $g(x)$. La $f(x) = h(x) - g(x)$. For å bevise setningen min, må vi vise at det finnes et punkt x slik at $f(x) = 0$. Hvis $f(0) = 0$, er vi ferdige, så vi kan anta at $f(0) \neq 0$. Legg merke til at $f(\pi) = -f(0)$ siden vi da har gått en halv omdreining og det opprinnelige punktet og det diametralt motsatte punktet har byttet roller. Det betyr at $f(x)$ har byttet fortegn fra 0 til π, og ifølge skjæringssetningen har f da et nullpunkt mellom 0 og π. Ferdig!

BERIT: Men dette ser jo helt riktig ut!

OLE: (*triunferende*): Var det ikke det jeg sa!

BERIT: Ro deg ned, din lerkefugl! Her må det være noe galt — vi har både et bevis og et moteksempel!

OLE: Kanskje det er skjæringssetningen som er gal. Husker du ikke at foreleseren sa at den var mindre opplagt enn den så ut til?

BERIT: Jeg tror det er større sjanse for at vi har brukt den galt. Hva er det setningen sier helt presist?

(*Ole griper en tykk og fiendtlig utseende bok som ligger på bordet. Han er visst ikke så veldig godt kjent i den, og bruker litt tid før han finner det han leter etter.*)

OLE: Her står det: "Anta at $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ er en kontinuerlig.."

BERIT: (*hyler*) Selvfølgelig!!! Jeg er en dust!

OLE: Det har jeg alltid visst, men hvorfor oppdaget du det akkurat nå?

BERIT: Det er du som er en dust, din dust! Du sjekker jo ikke forutsetningene dine! Dersom det er et loddrett stup tvers over sirkelen, er ikke $f(x)$ kontinuerlig!

OLE: (*for oppglødd til å være fornærmet*) ... og da gjelder ikke skjæringssetningen! Vi er et geni, Berit!

BERIT: (*spørrende*) *Vi* er et geni?!

OLE: Ja, vi to til sammen. Med min kreative fantasi og ditt logiske flisespikkeri er vi rett og slett uslålige! (*synger høyt og skjærende*) WE ARE THE CHAMPIONS ...

BERIT: (*lavt til seg selv*) Hold kjeft, din sjampinjong! (*Høyere*) Hva er det egentlig vi har vist?

OLE: Vi har vist at dersom høyden over havet varierer kontinuerlig langs sirkelperiferien, så finnes det to diametralt motsatte punkter med samme høyde, men dersom høyden ikke varierer kontinuerlig (på grunn av for eksempel stup eller overheng), så er det ikke sikkert at det er riktig.

BERIT: (*undrende*) Vent litt! Dersom det er et stup, så finnes det kanskje et punkt et stykke oppe i stupet etsteds som faktisk har samme høyde som et diametalt motsatt punkt! Kanskje ...

Ole: Det der får du tenke på alene! Nå tar jeg med med Maple-manualen og går og legger meg!

Slutt