26. oktober, 2001

MAT 100A: Mappeeksamen 4

Skriftlig innleveringsfrist: 2/11-2001, kl. 15.00

Informasjon: Denne eksamenen skal besvares skriftlig av de studentene som presenterte Mappeeksamen 2 muntlig. Alle andre studenter skal presentere denne eksamenen muntlig i uken 5/11-9/11. I begge tilfeller vil besvarelsen få en karakter som vil inngå i mappen.
Skriftlig innlevering: Den skriftlige besvarelsen *skal* være håndskrevet av deg selv (med mindre du har fått tillatelse til å levere besvarelsen i en annen form) og skal leveres inn i tre eksemplarer (en original og to kopier). Der oppgaven ber deg om å bruke Maple, har du selvfølgelig lov til å levere Mapleutskrifter. Skriftlige besvarelser skal enten leveres direkte til gruppelærer eller på ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje i Niels Henrik Abels hus). Husk å stifte besvarelsene!
Muntlig presentasjon: Når du skal presentere din besvarelse muntlig, velger du ut de tre oppgavene du helst vil presentere. Sensor trekker så én av disse oppgavene. Du har lov til å ha med deg skriftlige notater, og du bør ha med deg Mapleutskrifter der oppgavene ber om det.

Søknad om utsettelse: Studenter som blir syke eller av andre grunner ønsker å søke om utsettelse eller fritak fra denne eksamenen, må ta kontakt med Heidi M. Raude (rom B718 Niels Henrik Abels hus, telefon 22 85 59 01, e-post: heidimr@math.uio.no) så tidlig som mulig. Ved sykdom kreves det normalt legeattest. Foreleser og gruppelærere har ikke anledning til å gi utsettelse eller fritak.

Oppgave 1

I denne oppgaven er $f(x) = x^2 \arctan(x)$

a) Regn ut $f'(x)$ og vis at funksjonen er strengt voksende. Bruk Maple til å tegne grafen til f.

b) Regn ut $\int f(x)\,dx$.

c) La g være den omvendte funksjonen til f. Finn $g'(\frac{\pi}{4})$.

Oppgave 2

I denne oppgaven er $g(x) = \sin^2 x$ der $0 \leq x \leq \pi$.

a) Bruk Maple til å tegne grafen til g med samme enhet langs begge aksene. Regn ut arealet avgrenset av x-aksen og grafen til g.

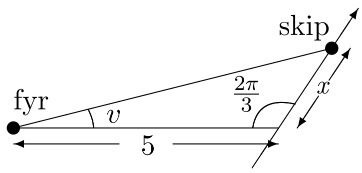
b) Området mellom x-aksen og grafen til g dreies en omdreining om y-aksen. Beregn volumet til omdreiningslegemet.

c) Finn

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{\arcsin(x^2)}$$

Oppgave 3

Et skip som seiler på en rettlinjet kurs, observeres fra et fyrtårn. Figuren viser situasjonen sett ovenfra. Alle avstander er målt i nautiske mil og alle vinkler i radianer.



a) Vis at $\tan v = \frac{x\sqrt{3}}{x+10}$

b) Avstanden x og vinkelen v øker med tiden t. Vis at

$$x'(t) = \frac{(x+10)^2}{10\sqrt{3}} \cdot \frac{v'(t)}{\cos^2 v}$$

c) Når $v = \frac{\pi}{6}$, øker vinkelen v med en fart av 1 radian/time. Hvor fort seiler skipet?

Oppgave 4

a) Funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er deriverbar med $f'(x) > 0$ for alle x. Forklar hvorfor f har en omvendt funksjon g. Vis at

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$$

b) Bruk formelen ovenfor til å regne ut

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \arcsin(\sqrt{x})\,dx$$

c) Lag en figur som forestiller grafen til f og markér punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ (du kan anta at disse punktene ligger i første kvadrant). Finn to områder på figuren som har areal lik henholdsvis $\int_a^b f(x)\,dx$ og $\int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\,dy$. Bruk dette til å lage et geometrisk bevis for formelen i punkt a).