

# MAT 100A: Obligatorisk oppgave

Innleveringsfrist: 10. november, 2000

## Oppgave 1

Regn ut:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\cos \frac{\pi x}{2}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\frac{2}{\ln x}}$

c)  $\int \sqrt{x} \sin(\sqrt{x}) dx$

d)  $\int \frac{x+1}{x^2+4x+6} dx$

## Oppgave 2

Vi har to komplekse tall  $z = 1 + i$  og  $w = \sqrt{3} - i$ .

a) Finn modulus og argument til  $z$  og  $w$ .

b) Regn ut  $zw$ . Bruk resultatet til å finne eksakte verdier for  $\sin(15^\circ)$  og  $\cos(15^\circ)$ .

## Oppgave 3

En smittsom sykdom sprer seg i en befolkning. Av dem som er syke én uke, vil 25% fortsatt være syke uken etter. Sykdommen har en inkubasjonstid på to uker, og en person som var syk for to uker siden, vil i gjennomsnitt ha smittet  $\frac{5}{4}$  person som blir syk denne uken. Vi lar  $x_n$  være antall personer som er syke etter  $n$  uker.

a) Forklar hvorfor

$$x_n - \frac{1}{4}x_{n-1} - \frac{5}{4}x_{n-2} = 0$$

og finn den generelle løsningen til denne differensligningen.

b) Den uken sykdommen ble oppdaget, var 190 personer syke. Uken etter var 260 personer syke. Hvor mange var syke  $n$  uker etter at sykdommen ble oppdaget? Hvordan vil det gå med antall syke etter som tiden går?

c) Sykdommen viser seg å være mindre smittsom enn først antatt. Det viser seg at en person som var syk for to uker siden, i gjennomsnitt bare har smittet  $\frac{3}{4}$  person som blir syk denne uken. Hva skjer med antall syke når tiden går? Hva skjer dersom det viser seg at hver syk person i gjennomsnitt smitter færre enn  $\frac{3}{4}$  person per uke?

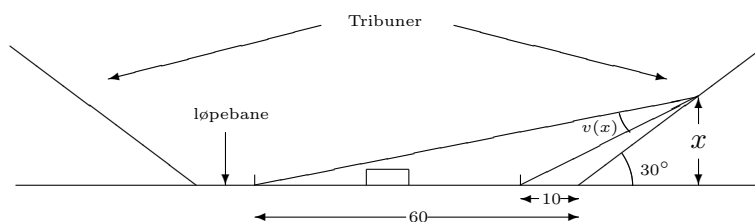
### Oppgave 4

Funksjonen  $f$  er gitt ved  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ .

- Regn ut  $f'(x)$  og bestem hvor funksjonen er voksende og hvor den er avtagende.
- Regn ut  $f''(x)$  og bestem hvor funksjonen er konveks og hvor den er konkav.
- Finn  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  og  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  og tegn grafen til  $f$ .
- $A$  er området under  $x$ -aksen mellom  $y$ -aksen og grafen til  $f$ . Er arealet til  $A$  endelig eller uendelig?
- Området under funksjonsgrafene mellom  $x = 1$  og  $x = e$  roteres om  $x$ -aksen. Finn volumet til omdreingslegemet.

### Oppgave 5

Arne og Egil skal på fotballkamp og lurer på hvor de bør sitte. Egil vil sitte der han alltid har sittet, men Arne går mer systematisk til verks og lager denne skissen.



Han regner ut at dersom de sitter  $x$  meter over bakken, vil vinkelen  $v(x)$  være gitt ved

$$v(x) = \arctan\left(\frac{60}{x} + \sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{10}{x} + \sqrt{3}\right)$$

“Hva du kan, Arne!” sier Egil, muligens med et snev av ironi.

- Forklar hvordan Arne har kommet fram til denne formelen.
- Finn  $v'(x)$ .
- Arne mener de bør sitte slik at vinkelen  $v(x)$  blir størst mulig. Hvor høyt oppe må de sitte for å følge Arnes teori?

### Oppgave 6

Bevis at følgende ulikhet gjelder for alle naturlige tall  $n$ :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$$