MAT 1100: Obligatorisk oppgave 1, H-06
Løsningsforslag

Oppgave 1: a) Vi faktoriserer ut høyeste potens i teller og nevner:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 2n^2 + 1}{1 + 3n - 7n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(2 - 2n^{-1} + n^{-3})}{n^3(n^{-3} + 3n^{-2} - 7)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - 2n^{-1} + n^{-3}}{n^{-3} + 3n^{-2} - 7} = -\frac{2}{7}$$

b) Siden $\sin n$ og e^{-n} er begrensede størrelser (de er begge mindre enn eller lik 1 for alle $n \in \mathbb{N}$), faktoriserer vi ut den dominerende størrelsen n^2 i teller og nevner:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + \sin n}{4n^2 + e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1 + \frac{\sin n}{n^2})}{n^2(4 + \frac{e^{-n}}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{\sin n}{n^2}}{4 + \frac{e^{-n}}{n^2}} = \frac{1}{4}$$

c) Vi ganger med den konjugerte i teller og nevner:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2 + 3n} - n\right)\left(\sqrt{n^2 + 3n} + n\right)}{\left(\sqrt{n^2 + 3n} + n\right)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2 + 3n) - n^2}{\left(\sqrt{n^2 + 3n} + n\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{n(\sqrt{1 + 3n^{-1}} + 1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\left(\sqrt{1 + 3n^{-1}} + 1\right)} = \frac{3}{2}$$

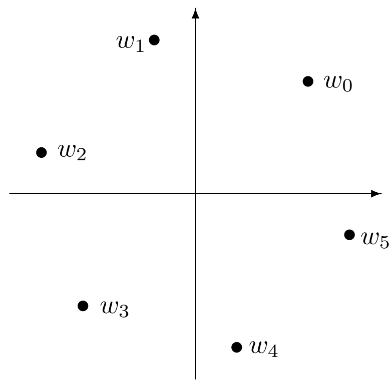
Oppgave 2: Vi må først skrive $z = -64i$ på polarform. Siden $-64i$ er punktet med koordinater (0,-64), er det lett å se direkte at $r = 64$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Altså er $z = 64e^{3\pi/2}$. For å finne den første roten $w_0 = \rho e^{i\phi}$ tar vi sjetterot til modulusen og sjettedelen av argumentet:

$$\rho = \sqrt[6]{64} = 2 \qquad \text{og} \qquad \phi = \frac{\frac{3\pi}{2}}{6} = \frac{\pi}{4}$$

Dermed er

$$w_0 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Før vi går videre, kan det være lurt å tegne opp røttene i det komplekse planet. Siden røttene deler planet inn i 6 like store områder, blir figuren slik:



Legg merke til at $w_3 = -w_0$, $w_4 = -w_1$, $w_5 = -w_2$ slik at det er nok å regne ut w_0, w_1, w_2. Hver ny rot fremkommer dessuten ved at vi dreier den foregående en vinkel $\frac{\pi}{3}$ om origo. Vi får

$$w_1 = 2e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6}} = w_0 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = (\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

(Jeg velger å gange med $e^{i\frac{\pi}{3}}$ fremfor å finne sinus og cosinus til $\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi}{6} = \frac{7\pi}{12}$.) Tilsvarende er

$$w_2 = 2e^{i\frac{\frac{3\pi}{2}+4\pi}{6}} = w_1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = (\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2})(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

(Du kan også finne denne roten geometrisk uten å regne så mye — det er ikke tilfeldig at koordinatene ligner på koordinatene til w_1!) Videre har vi

$$w_3 = -w_0 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$w_4 = -w_1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

$$w_5 = -w_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

Oppgave 3: Jeg skal vise at dersom $P(x) = Q(x)$ for alle *reelle* tall x, så må P og Q være det samme polynomet (dvs. ha de samme koeffisientene), og dermed er selvfølgelig $P(z) = Q(z)$ for alle komplekse tall z. Anta (for motsigelse) at P og Q *ikke* er det samme polynomet, men at vi likevel har $P(x) = Q(x)$ for alle reelle tall x. Da er $R = P - Q$ et polynom av en eller annen grad n. Ifølge aritmetikkens fundamentalteorem har R høyst n nullpunkter, og følgelig kan ikke $R(x)$ være 0 for alle reelle tall x. Da kan heller ikke $P(x) = Q(x)$ for alle reelle tall x, og vi har vår motsigelse.