MAT 1100: Obligatorisk oppgave 2, H-06
Løsningsforslag

a) Derivasjon gir (husk produktregelen):

$$g'(t) = 1 \cdot e^t + te^t - e^t = te^t$$

Siden e^t alltid er positiv, er $g'(t)$ positiv for $t > 0$ og negativ for $t < 0$. Dette betyr at g er voksende på $[0, \infty)$ og avtagende på $(-\infty, 0]$. Den minste verdien til g blir dermed $g(0) = 0 \cdot e^0 - e^0 + 1 = 0$.

Til slutt har vi

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = \lim_{t\to-\infty}(te^t - e^t + 1) = \lim_{t\to-\infty} te^t - \lim_{t\to-\infty} e^t + \lim_{t\to-\infty} 1 =$$

$$= \lim_{t\to-\infty} te^t - 0 + 1 = \lim_{t\to-\infty} te^t + 1$$

Siden te^t er et $\infty \cdot 0$-uttrykk, gjør vi det om til et ∞/∞-uttrykk og bruker L'Hôpitals regel:

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to\ -\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = -\lim_{t\to-\infty} e^t = 0$$

Dermed er

$$\lim_{t\to-\infty} g(t) = 1$$

b) Vi har

$$g''(t) = 1 \cdot e^t + te^t = (t+1)e^t$$

Siden e^t alltid er positiv, blir $g''(t)$ positiv for $t > -1$ og negativ for $t < -1$. Dermed er g konveks for $t \geq -1$ og konkav for $t \leq -1$. Du finner grafen til slutt i løsningsforslaget.

c) For $t \neq 0$ er funksjonen kontinuerlig siden den er en sammensetning av kontinuerlige funksjoner i et område rundt t. Vi sjekker kontinuitet i $t = 0$ ved å regne ut grenseverdien til f i 0:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{1} = 1$$

Altså er $\lim_{t\to 0} f(t) = 1 = f(0)$ som viser at f også er kontinuerlig i 0.

d) Vi bruker definisjonen av deriverbahet:

$$f'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{e^t-1}{t} - 1}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{2t} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^t}{2} = \frac{1}{2}$$

Kommentar: En alternativ måte å løse denne oppgaven på, er å regne ut $f'(t)$ for $t \neq 0$, og så ta grenseverdien når t går mot null. Denne metoden forutsetter en setning som sier at dersom $\lim_{t\to a} f'(t) = b$, så eksisterer $f'(a)$ og er lik b. Dette er riktig, men ikke helt lett å bevise (se oppgave 6.2.2 i *Kalkulus*). Noen får svaret 0 i denne oppgaven fordi de deriverer konstanten 1 i definisjonen av f. Dette blir ikke riktig — skal vi derivere på denne måten, må f være lik 1 i et område rundt 0 og ikke bare i punktet selv.

e) Fra analysens fundamentalteorem har vi at

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

Siden både $e^x - 1$ og x skifter fortegn fra minus til pluss i $x = 0$, ser vi at $F'(x) > 0$ for alle x. Dette betyr at x er strengt voksende på hele $\mathbf{R}$.

f) Vi har $F''(x) = f'(x)$. Vi vet allerede at $f'(0) = \frac{1}{2}$. For $x \neq 0$, har vi

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)' = \frac{e^x x - (e^x - 1)\cdot 1}{x^2} = \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

der g er funksjonen i punkt a). Siden $g(x)$ og x^2 er positive for alle $x \neq 0$, har vi dermed at $F''(x) = f'(x)$ er positiv for alle x. Altså er F konveks på hele $\mathbf{R}$.

g) Vi skal vise at $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$ og $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$. Når vi vet dette, kan vi bruke L'Hôpitals regel på de to uttrykkene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\frac{e^x}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{e^x x - e^x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^x - x}{xe^x - e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

og

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{F(x)}{\ln|x|} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} (e^x - 1) = -1$$

.

Det gjenstår å vise at $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$ og $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$. Siden $f(x)$ er en voksende funksjon med $f(0) = 1$, er $f(t) \geq 1$ for $t \geq 0$. Dermed er

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt \geq \int_0^x 1\, dt = x$$

så $F(x) \to \infty$ når $x \to \infty$.

Den andre grensen er verre. La oss innføre en ny variabel $s = -t$ for å slippe å resonnere med negative størrelser. Da blir $ds = -dt$, og vi får

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt = \int_0^{-x} \frac{e^{-s} - 1}{-s}\, (-ds) = -\int_0^y \frac{1 - e^s}{s}\, ds$$

det $y = -x$. Det er derfor nok å vise at

$$\int_0^y \frac{1 - e^{-s}}{s}\, ds \to \infty$$

når $y \to \infty$ (husk at $y \to \infty$ når $x \to -\infty$). Siden $e^{-s} \leq e^{-1}$ når $s \geq 1$, har vi

$$\int_0^y \frac{1 - e^{-s}}{s}\, ds > \int_1^y \frac{1 - e^{-s}}{s}\, ds > \int_1^y \frac{1 - e^{-1}}{s}\, ds = (1 - e^{-1}) \ln y \to \infty$$

når $y \to \infty$. Dermed er argumentet fullstendig.

Grafen til g fra punkt b):