FORMELSAMLING FOR MAT 1100 OG MAT-INF 1100

Eksponentialfunksjoner

Derivasjon: $(a^x)' = a^x \ln a$ spesielt $(e^x)' = e^x$
Identiteter: $a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $(a^x)^y = a^{xy}$

Logaritmefunksjonen

Derivasjon: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
Identiteter: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$ $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$
$\ln(x^a) = a \ln x$ for $x, y > 0$

Trigonometriske funksjoner

Derivasjon: $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Identiteter: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
$\sin x = \pm\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$
$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$

Eksakte verdier:

v	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin v$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos v$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan v$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Arcusfunksjoner

Derivasjon; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Komplekse tall

Skrivemåter: $z = a + ib = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$
Eksponentialfunksjonen: $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$
De Moivres formel: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Funksjoner av flere variable

Gradienten: $\nabla f(\mathbf{x}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}))$
Kjerneregelen: $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial x_i}(\mathbf{a}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u_m}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial g_m}{\partial x_i}(\mathbf{a})$
Annenderiverttesten: Anta at (a, b) er et stajonært punkt og la $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$, $D = AC - B^2$. Da gjelder
i) Hvis $D < 0$, er (a, b) et sadelpunkt.
ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, er (a, b) et lokalt minimum.
iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, er (a, b) et lokalt maksimum.
Lagranges multiplikatormetode: $\nabla f(\mathbf{a}) = \lambda \nabla g(\mathbf{a})$ (eller $\nabla g(\mathbf{a} = 0)$).

Differens- og differensialligninger

Annenordens differensligning $x_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$:

$$x_n = \begin{cases} Cr_1^n + Dr_2^n & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Cr^n + Dnr^n & \text{hvis én reell rot } r \\ C\rho^n \cos(n\theta) + D\rho^n \sin(n\theta) & \text{hvis to komplekse røtter } r = \rho e^{\pm i\theta} \end{cases}$$

Annenordens differensialligning $y'' + py' + qy = 0$:

$$y(x) = \begin{cases} Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x} & \text{hvis to reelle røtter } r_1 \neq r_2 \\ Ce^{rx} + Dxe^{rx} & \text{hvis én reell rot } r \\ Ce^{ax} \cos(bx) + De^{ax} \sin(bx) & \text{hvis to komplekse røtter } r = a \pm ib \end{cases}$$

Numeriske formler

Newtons metode: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
Taylors formel: $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt =$
$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$
Trapesmetoden: $\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots$
$+ 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1}) + f(x_n))$
Simpsons formel: $\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{\Delta x}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots$
$+ 4f(x_{2n-3}) + 2f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n}))$
Eulers metode: Førsteordens ligning: $y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})h$
Annenordens ligning:

$$\begin{cases} y_n = y_{n-1} + hDy_{n-1} \\ Dy_n = Dy_{n-1} + hg(x_{n-1}, y_{n-1}, Dy_{n-1}) \end{cases}$$