Løsningsforslag til obligatorisk oppgave i MAT1100, Høst 2005.
Innleveringsfrist: 16. september 2005.

Oppgave 1. Komplekse tall:
a) Finn polarformen til $\sqrt{3}+i$.
Løsning. Modulus til $z=\sqrt{3}+i$ er lik

$$\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{4}=2.$$

Argumentet θ til z er bestemt av

$$\sin\theta=\frac{1}{2}.$$

Det gir $\theta=\frac{\pi}{6}$. Polarformen til z blir derfor

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}}\ 2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}).$$

b) Skriv det komplekse tallet

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{(1-i)^{29}}$$

på formen $a+ib$ hvor $a,b\in\mathbb{R}$.
Løsning. For å regne ut denne brøken bruker vi den komplekse eksponentialfunksjonen. Fra **a**) har vi

$$\sqrt{3}+i=2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

På samme måte finner vi

$$1-i=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Brøken i oppgaven kan derfor skrives på formen

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{(1-i)^{29}}&=\frac{(2e^{i\frac{\pi}{6}})^{15}}{(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^{29}}=\frac{2^{15}e^{i\frac{15\pi}{6}}}{(\sqrt{2})^{29}e^{-i\frac{29\pi}{4}}}\\&=(\sqrt{2})^{30-29}e^{i(\frac{5\pi}{2}+\frac{29\pi}{4})}=\sqrt{2}e^{i\frac{39\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\\&=\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})\\&=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})\\&=\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}})\\&=1-i.\end{aligned}$$

Vi har altså $a=-b=1$.

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}}\ 1-i.$$

c) Finn alle komplekse løsninger av likningen $z^5=1$.
Løsning. Setning 3.4.2 i læreboka viser at løsningene er gitt ved

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}}\ z_k=e^{i\frac{2k\pi}{5}}=\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5},\ 0\le k\le 4.$$

d) La z_1 og $z_2 \neq 0$ være komplekse tall. Vis at $z_1\overline{z_2}$ er et positivt reellt tall hvis og bare hvis det fins et positivt reellt tall $r \in \mathbb{R}$ slik at $z_1 = rz_2$.

Løsning. Hvis $z_1 = rz_2$ kan vi sette $r = \frac{z_1}{z_2}$ siden $z_2 \neq 0$. Vi ønsker å vise at $z_1\overline{z_2} > 0$. Det følger fra ulikhetene $r > 0$, $|z_2|^2 > 0$ og likhetene

$$r = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Motsatt, hvis $z_1\overline{z_2}$ er et positivt reellt tall får vi $z_1 = rz_2$ for $r = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} > 0$ siden

$$z_1\overline{z_2} = z_1\overline{z_2}\frac{z_2}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}|z_2|^2.$$

I disse utregningene har vi brukt formelen $z\overline{z} = |z|^2$.

Oppgave 2. Følger, kontinuerlige funksjoner:

a) La $n \geq 1$ og

$$a_n = \frac{en+1}{n}.$$

Vis at følgen $\{a_n\}$ konvergerer mot e.

Løsning. Denne oppgaven er en variant av Eksempel 4.3.2 i læreboka. Merk at

$$|a_n - e| = |\frac{en+1}{n} - e| = |\frac{en+1-en}{n}| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}.$$

Ved å velge et naturlig tall N slik at $\frac{1}{N} < \epsilon$ (Arkimedes' prinsipp), ser vi at $|a_n - e| < \epsilon$ for alle $n \geq N$.

b) Bruk et $\epsilon - \delta$-argument til å vise at funksjonen

$$f(x) = x^2$$

er kontinuerlig.

Løsning. Vi må vise at for enhver $\epsilon > 0$ finnes det en $\delta > 0$ slik at $|x-a| < \delta$ impliserer $|x^2 - a^2| < \epsilon$. For å finne δ bruker vi utregningen

$$|x^2 - a^2| = |x-a||x+a| = |x-a||x-a+2a| \leq |x-a|(|x-a| + |2a|).$$

Merk at $|x^2 - a^2| < \epsilon$ dersom

$$|x-a| < 1 \text{ og } |x-a| < \frac{\epsilon}{1+2|a|}.$$

Vi kan derfor velge

$$\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{1+2|a|}\}.$$

Endel har løst oppgaven på en litt annerledes måte. Siri Øyen Larsen har foreslått følgende løsning:

$$|x^2 - a^2| = |x+a||x-a| = |x-a+2a||x-a| \leq |x-a|(|x-a| + 2|a|) < \delta(\delta + 2|a|)$$

Ønsker $\delta^2 + 2|a|\delta < \epsilon$, så fullfører kvadratet:

$$\begin{aligned} \delta^2 + 2|a|\delta + a^2 &< \epsilon + a^2 \\ (\delta + |a|)^2 &< \epsilon + a^2 \\ \delta + |a| &< \sqrt{\epsilon + a^2} \\ \delta &< \sqrt{\epsilon + a^2} - |a| \end{aligned}$$

Så vi kan sette $\delta = \sqrt{\epsilon + a^2} - |a|$ slik at vi får

$$|f(x) - f(a)| < \delta(\delta + 2|a|) = (\sqrt{\epsilon + a^2} - |a|)(\sqrt{\epsilon + a^2} + |a|) = \epsilon + a^2 - a^2 = \epsilon.$$

c) La $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

Avgjør om f er kontinuerlig i 0.

Løsning. Setning 5.1.7 i læreboka viser at hvis f er kontinuerlig i punktet 0 og $\{a_n\}$ er en følge av reelle tall som konvergerer mot 0, så konvergerer $\{f(a_n)\}$ mot 0.

La $n \geq 1$ og

$$a_n = \frac{1}{2\pi n}.$$

Det er enkelt å se at $\{a_n\}$ konvergerer mot 0. Vi skal vise at f er diskontinuerlig ved å sjekke at $\{f(a_n)\}$ ikke konvergerer mot $f(0) = 0$. Utregningen

$$f(a_n) = 2\pi n \sin 2\pi n - \cos \frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = -1,$$

viser at følgen $\{f(a_n)\}$ konvergerer mot $-1 \neq 0$.

Mange vil nok også argumentere for at $x \sin \frac{1}{x}$ kan utvides til en kontinuerlig funksjon på $\mathbb{R}$. Det kan man bevise på følgende måte. Sinusfunksjonen oppfyller ulikhetene

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1.$$

Ved å gange inne med $x > 0$ får vi

$$-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x.$$

Lar vi nå $x \to 0^+$ i den siste ulikheten, ser vi at

$$\lim_{x \to 0^+} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

På samme måte får vi

$$\lim_{x \to 0^-} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Ved å kombinere utregningene av de ensidige grenseverdiene finner vi

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

d) La $a > 0$ være en konstant. Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{1+a^x}.$$

Løsning. For telleren i brøken har vi

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{for } a < 1 \\ 1 & \text{for } a = 1 \\ \infty & \text{for } a > 1. \end{cases}$$

Enkel utregning løser nå oppgaven. F.eks. for $a > 1$ har vi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{1+a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{a^x}} = 1.$$

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}} \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{1+a^x} = \begin{cases} 0 & \text{for } a < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for } a = 1 \\ 1 & \text{for } a > 1. \end{cases}$$

Oppgave 3. Deriverbare funksjoner:

a) Deriver funksjonen

$$f(x) = \ln(\frac{x^2}{1+x^2}).$$

Løsning.

$$f(x) = \ln(\frac{x^2}{1+x^2}) = \ln(x^2) - \ln(1+x^2) = 2\ln(x) - \ln(1+x^2).$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2) - 2x^2}{x(1+x^2)} = \frac{2}{x(1+x^2)}.$$

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}} \frac{2}{x(1+x^2)}.$$

b) Finn $f'(x)$ dersom

$$e^{f(x)} = 1 + x^2.$$

Løsning.

$$e^{f(x)} = 1 + x^2, \ f'(x)e^{f(x)} = 2x, \ f'(x)(1+x^2) = 2x.$$

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}} f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Den neste oppgaven teller ikke på evalueringen av besvarelsen.

Oppgave 4. Anta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en funksjon slik at likningen $f(x) = y$ har eksakt to forskjellige løsninger for alle reelle tall $y \in \mathbb{R}$. Vis at f ikke er kontinuerlig.

Løsning. Likningen $f(x) = 0$ har eksakt to forskjellige løsninger, si $x = a$ og $x = b$. Da er enten (i) $f(x) > 0$ eller (ii) $f(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$. Anta at (i) holder og at f er kontinuerlig. Siden $[a, b]$ er et lukket og begrenset intervall og f er kontinuerlig, gir ekstremalverdisetningen at f har et maksimumspunkt, si for $c \in [a, b]$. Ut fra antagelsen i oppgaveteksten har da likningen $f(x) = f(c) + \epsilon$ to forskjellige løsninger for alle $\epsilon > 0$. La d være en av disse løsningene. Da er enten $d < a$ eller $d > b$. Derson $d < a$ og $\delta > 1$ viser skjæringssetningen at likningen $f(x) = \frac{f(c)}{\delta}$ har minst en løsning i hvert av de åpne intervallene (d, a), (a, c) og (c, b). Tilsvarende, hvis $d > b$ vil den samme likningen ha minst en løsning i hvert av de åpne intervallene (a, c), (c, b) og (b, d). Begge mulighetene leder til en motsigelse siden likningen vi ser på har eksakt to løsninger ifølge antagelsen. Tilfellet (ii) følger fra (i) ved å skifte fortegn på funksjonen.