Løsningsforslag til obligatorisk oppgave i MAT1100, Høst 2005.
Innleveringsfrist: 28. oktober 2005.

Vis alle mellomregninger. Oppgave 4 er frivillig. Lykke til!

Oppgave 1. Grenser og deriverte:

a) Finn grenseverdiene:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin(\pi x)} \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^{2x}}\right)$$

Løsning. I utregningene nedenfor bruker vi L'Hôpitals regel.
(i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x}=\lim_{x\to 0}(3^x\ln(3)-2^x\ln(2))=\ln(3)-\ln(2)=\ln(\frac{3}{2}).$$

(ii)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin(\pi x)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\pi x\cos(\pi x)}=\frac{-1}{\pi}.$$

(iii)

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^{2x}})=\lim_{x\to 0}(\frac{e^{2x}-1}{xe^{2x}})=\lim_{x\to 0}(\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+2xe^{2x}})=2.$$

b) Definer f ved

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{for } x\neq 0\\ 1 & \text{for } x=0.\end{cases}$$

Er f deriverbar i 0 ? Skisser grafen til f.
Løsning. Funksjonen er deriverbar i null fordi $f'(0)$ er lik

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sin h}{h}-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h-h}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{-\sin h}{2}\\&=0.\end{aligned}$$

Grafen til $f(x)$ tangerer grafen til $\frac{\pm 1}{x}$ når $\sin x=\pm 1$. Merk at $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$.
I skissen av grafen bør disse opplysningene være med.
c) Finn den deriverte til $f(x)=\cos(x^x)$, $x>0$.
Løsning. Skriv $x^x=(e^{\ln x})^x=e^{x\ln x}$ slik at $f(x)=\cos(e^{x\ln x})$. Kjerneregelen gir

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\sin(e^{x\ln x})(1+\ln x)e^{x\ln x}\\&=-x^x(1+\ln x)\sin(x^x).\end{aligned}$$

d) Anta $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon slik at

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Bevis at f er deriverbar hvis $f'(0)$ eksisterer.

Løsning. Det at f er deriverbar følger fra utregningen

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x+0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)f(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} f(x)\frac{f(h)-f(0)}{h}\\
&= f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\
&= f(x)f'(0).
\end{aligned}$$

Oppgave 2. Anvendelser:

a) En partikkel beveger seg mot klokka på enhetssirkelen i xy-planet med en hastighet på 1 radian per sekund. Hvor stor er forandringen i avstanden mellom partikkelen og y-aksen i sekunder når $x = y > 0$?

Løsning. Koordinatene til punktet i xy-planet er $(\cos\theta, \sin\theta)$. Avstanden mellom punktet og y-aksen er absoluttverdien til x-koordinaten, som siden $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ er lik $\cos\theta$. Forandringen i avstanden i radianer per sekund blir derfor

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}}\ \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

b) La S være en sylinder med høyde h og radius r innskrevet i en kule med radius 2005 lengdeenheter. Finn h og r som gir S størst mulig volum.

Løsning. Hvis $R = 2005$ får vi $R^2 = r^2 + (\frac{h}{2})^2$, slik at volumet til sylinderen blir

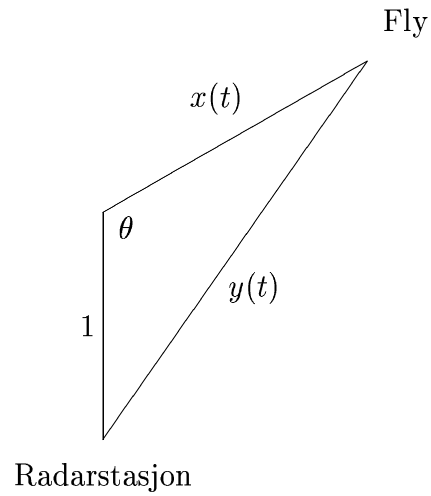
$$V(h) = \pi r^2 h = \pi(R^2 - \frac{h^2}{4})h = \pi(R^2 h - \frac{h^3}{4}).$$

Det gir $V'(h) = \pi(R^2 - \frac{3h^2}{4}) = 0$ hvis og bare hvis $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}}\ \text{Høyden } h = \frac{4010}{\sqrt{3}} \text{ og radius } r = 2005\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ lengdeenheter.}$$

c) Et fly som stiger med en konstant vinkel på 30^0 i forhold til horisonten passerer rett over en radarstasjon i en avstand på 1000 meter. På et visst tidspunkt er flyet 2000 meter fra radarstasjonen og avstanden øker med 7 km/min. Finn farten til flyet.

Løsning. La $x(t)$ være avstanden fra punktet 1 km over radarstasjonen til flyet ved tiden t, og la $y(t)$ være avstanden fra radarstasjonen til flyet ved tiden t:



Cosinusloven gir likningen

$$\begin{aligned} y(t)^2 &= x(t)^2 + 1^2 - 2x(t)\cos(\frac{2\pi}{3}) \\ &= x(t)^2 + x(t) + 1. \end{aligned}$$

Så $y(t) = 2$ km gir spesielt

$$x(t)^2 + 2x(t) - 3 = 0.$$

Dette er en annengradslikning med positiv løsning

$$x(t) = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

Deriverer vi nå med hensyn på tiden t, får vi

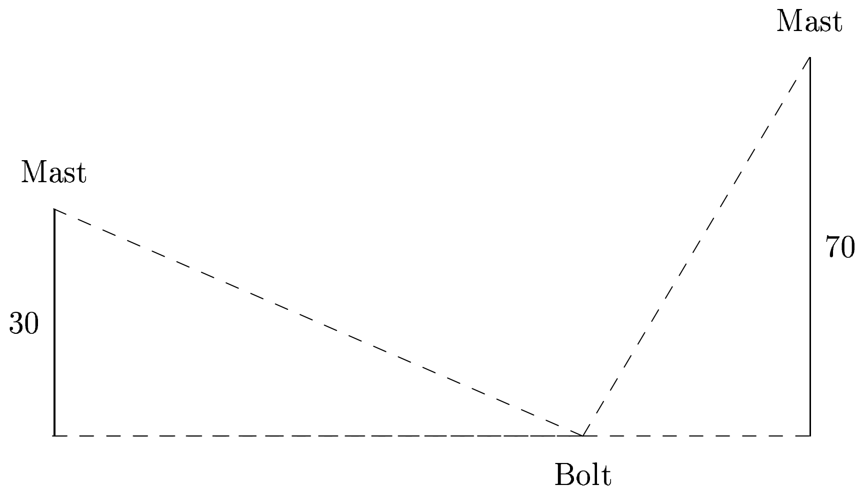
$$\begin{aligned} 2y(t)\frac{dy(t)}{dt} &= 2x(t)\frac{dx(t)}{dt} + \frac{dx(t)}{dt} \\ &= (2x(t)+1)\frac{dx(t)}{dt}. \end{aligned}$$

For $y(t) = 2$ er $\frac{dy(t)}{dt} = 7$, slik at

$$2 \cdot 2 \cdot 7 = (-1 + \sqrt{13} + 1)\frac{dx(t)}{dt}.$$

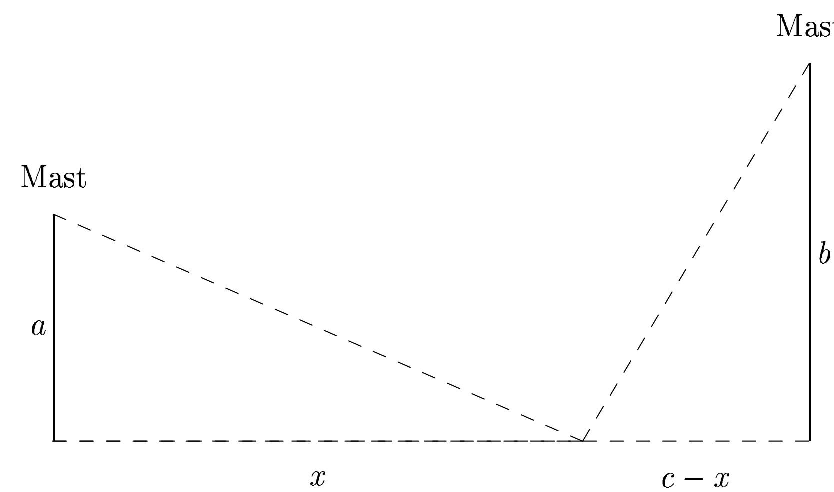
<u>Svar:</u> Farten til flyet er lik $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{28}{\sqrt{13}}$ km/min.

d) Du skal strekke en kortest mulig ledning mellom to master på 30 og 70 meter som er plassert 100 meter fra hverandre:



Ledningen skal festes i en bolt mellom de to mastene. Hvor vil du plassere bolten ?

Løsning. For å forenkle utregningen lar vi $a = 30$, $b = 70$ og $c = 100$. Vi har figuren:



Ved Pythagoras teorem er oppgaven å finne et minimumspukt for funksjonen

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2} \text{ hvor } 0 < x < 30.$$

Den deriverte blir

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{x - c}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}.$$

For å finne x slik at $f'(x) = 0$ må vi løse likningen

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{c - x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}.$$

Kvadrerer vi uttrykkene på begge sider av likhetstegnet, får vi

$$\frac{x^2}{x^2 + a^2} = \frac{(c-x)^2}{(c-x)^2 + b^2},$$

eller

$$x^2((c-x)^2+b^2) = (c-x)^2(x^2+a^2).$$

Enkel regning gir

$$(b^2-a^2)x^2 + 2a^2cx - a^2c^2 = 0.$$

Dette er en annengradslikning med positiv løsning

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2a^2c + \sqrt{4a^4c^2 + 4a^2b^2c^2 - 4a^4c^2}}{2(b^2-a^2)} \\ &= \frac{-a^2c + abc}{b^2-a^2} = \frac{ac(b-a)}{(b+a)(b-a)} \\ &= \frac{ac}{a+b}. \end{aligned}$$

Svar: Bolten må plasseres 30 meter fra den laveste masta som på figurene ovenfor.

Oppgave 3. Integrasjon:
a) Finn integralene:

$$\text{(i)} \int \frac{x^2-x+6}{x^2+3x}dx \qquad \text{(ii)} \int \sin^2(x)dx \qquad \text{(iii)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Løsning.
(i) Polynomdivisjon gir

$$x^2 - x + 6 = (x^2+3x)(1 + \frac{6-4x}{x^2+3x}).$$

Neste steg er å delbrøkoppspalte den rasjonale funksjonen på formen

$$\frac{6-4x}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}.$$

Vi ser altså på likningen

$$6 - 4x = A(x+3) + Bx.$$

Løsningene er gitt ved $A = 2$ og $B = -6$. For integralet sin del gir det

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-x+6}{x^2+3x}dx &= \int (1 + \frac{2}{x} - \frac{6}{x+3})dx \\ &= x + 2\ \ln|x| - 6\ \ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

(ii) Sett $u(x) = \sin x$, $v'(x) = \sin x$ slik at $u'(x) = \cos x$, $v(x) = -\cos x$. Formelen for delvis integrasjon gir

$$\begin{aligned}\int \sin^2(x)dx &= -\sin x\cos x - \int -\cos^2(x)dx\\ &= -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2(x))dx\\ &= -\sin x\cos x + \int dx - \int \sin^2(x)dx.\end{aligned}$$

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}}\ \int \sin^2(x)dx = \frac{x-\sin x\cos x}{2} + C$$

(iii) Integralet kan løses ved å bruke substitusjonen $x = \sin\theta$, $dx = \cos\theta d\theta$. Altså

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{\sin^2(\theta)}{\cos\theta}\cos\theta d\theta = \int \sin^2(\theta)d\theta.$$

Del (i) impliserer

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}}\ \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

b) La $0 \le x \le \pi$. Linjen $x = c$ deler området avgrenset av x-aksen og kurven $y = \sin x$ i to deler. Finn c dersom arealet til den høyre delen er tre ganger så stort som arealet til den venstre delen.

Løsning. Uttrykt ved integraler sier oppgaveteksten at

$$3\int_0^c \sin x dx = \int_c^\pi \sin x dx.$$

Vi har $\int_0^c \sin x dx = \cos 0 - \cos c = 1 - \cos c$ og $\int_c^\pi \sin x dx = \cos\pi - \cos c = -1 - \cos c$. Får derfor $3(1-\cos c) = -1 - \cos c$, altså $\cos c = \frac{1}{2}$.

$$\underline{\underline{\text{Svar:}}}\ c = \frac{\pi}{3}.$$

Oppgave 4. Anta $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ er slik at $f'(x)$ er kontinuerlig, $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$. Bevis ulikheten

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)|dx \ge e^{-1}.$$

Løsning. Siden $f'(x) - f(x) = (f(x)e^{-x})'e^x$ og $e^x \ge 1$ for $x \ge 0$, får vi

$$\int_0^1 |f'(x)-f(x)|dx = \int_0^1 |(f(x)e^{-x})'e^x|dx \ge \int_0^1 (f(x)e^{-x})'dx = f(1)e^{-1} - f(0)e^0 = e^{-1}.$$