Obligatorisk oppgave i MAT1100, Høst 2005.
Innleveringsfrist: 16. september 2005.

Vis alle mellomregninger. Oppgave 4 er frivillig. Lykke til!

Oppgave 1. Komplekse tall:
a) Finn polarformen til $\sqrt{3}+i$.
b) Skriv det komplekse tallet

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{15}}{(1-i)^{29}}$$

på formen $a+ib$ hvor $a,b\in\mathbb{R}$.
c) Finn alle komplekse løsninger av likningen $z^5=1$.
d) La z_1 og $z_2\neq 0$ være komplekse tall. Vis at $z_1\overline{z_2}$ er et positivt reellt tall hvis og bare hvis det fins et positivt reellt tall $r\in\mathbb{R}$ slik at $z_1=rz_2$.

Oppgave 2. Følger, kontinuerlige funksjoner:
a) La $n\geq 1$ og

$$a_n=\frac{en+1}{n}.$$

Vis at følgen $\{a_n\}$ konvergerer mot e.
b) Bruk et $\epsilon-\delta$-argument til å bevise at funksjonen

$$f(x)=x^2$$

er kontinuerlig.
c) Definer f ved

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & \text{for } x\neq 0\\ 0 & \text{for } x=0.\end{cases}$$

Avgjør om f er kontinuerlig i 0.
d) La $a>0$ være en konstant. Finn grenseverdien

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{1+a^x}.$$

Oppgave 3. Deriverbare funksjoner:
a) Deriver funksjonen

$$f(x)=\ln(\frac{x^2}{1+x^2}).$$

b) Finn $f'(x)$ dersom

$$e^{f(x)}=1+x^2.$$

Oppgave 4. Anta $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er en funksjon slik at likningen $f(x)=y$ har eksakt 2 forskjellige løsninger for alle reelle tall $y\in\mathbb{R}$. Bevis at f ikke er kontinuerlig.