Obligatorisk oppgave i MAT1100, Høst 2005.
Innleveringsfrist: 28. oktober 2005.

Vis alle mellomregninger. Oppgave 4 er frivillig. Lykke til!

Oppgave 1. Grenser og deriverte:

a) Finn grenseverdiene:

$$\text{(i)}\ \lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x} \qquad \text{(ii)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\sin(\pi x)} \qquad \text{(iii)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{xe^{2x}}\right)$$

b) Definer funksjonen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ved

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & \text{for } x\neq 0\\ 1 & \text{for } x=0.\end{cases}$$

Er f deriverbar i 0 ? Skisser grafen til f.

c) Finn den deriverte til $f(x)=\cos(x^x)$, $x>0$.

d) Anta $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon slik at

$$f(x+y)=f(x)f(y).$$

Bevis at f er deriverbar hvis $f'(0)$ eksisterer. Hint: $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)$.

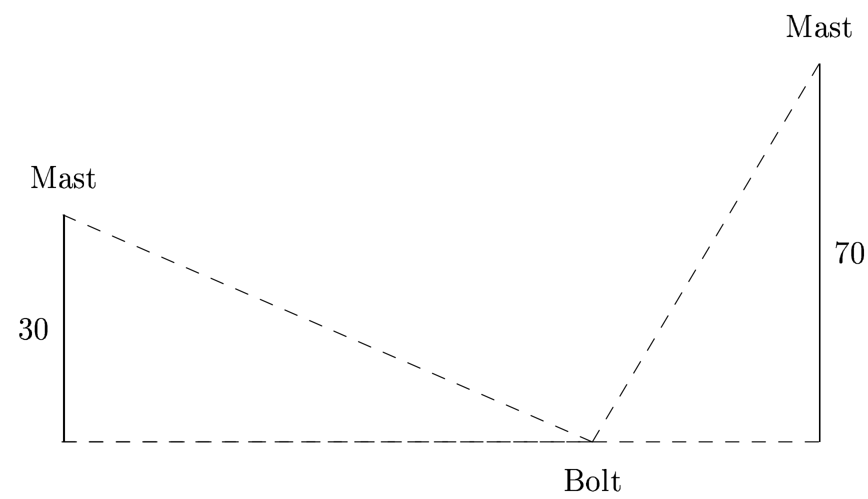
Oppgave 2. Anvendelser:

a) En partikkel beveger seg mot klokka på enhetssirkelen $(\cos\theta,\sin\theta)$ i xy-planet med en hastighet på 1 radian per sekund. Hvor raskt forandres avstanden mellom y-aksen og partikkelen når $\theta=\frac{\pi}{4}$?

b) La S være en sylinder, med høyde h og radius r, som er innskrevet i en kule med radius 2005. Finn h og r som gir S størst mulig volum.

c) Et fly som stiger med en konstant vinkel på 30^0 i forhold til horisonten passerer rett over en radarstasjon i en avstand på 1000 meter. Når flyet er 2000 meter fra radarstasjonen øker avstanden med 7 km/min. Finn farten til flyet.

d) Du skal strekke en kortest mulig ledning mellom to master på 30 og 70 meter som er plassert 100 meter fra hverandre:



Ledningen skal festes i en bolt mellom de to mastene. Hvor vil du plassere bolten ?

Oppgave 3. Integrasjon:
a) Finn integralene:

$$\text{(i)} \int \frac{x^2 - x + 6}{x^2 + 3x} dx \qquad \text{(ii)} \int \sin^2(x) dx \qquad \text{(iii)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

b) La $0 \leq x \leq \pi$. Linjen $x = c$ deler området avgrenset av x-aksen og kurven $y = \sin x$ i to deler. Finn c dersom arealet til den høyre delen er tre ganger så stort som arealet til den venstre delen.

Oppgave 4. Anta $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ er en funksjon slik at $f'(x)$ er kontinuerlig, $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$. Bevis ulikheten

$$\int_0^1 |f'(x) - f(x)| dx \geq e^{-1}.$$