Løsningsforslag til oppgave 2.7.8

a) Vi lar k være den sammensatte funksjonen $k(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Ifølge kjerneregelen (på komponentform) er da

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

der vi i siste trinn har brukt at $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta$ (siden $x = r\cos\theta$) og at $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$ (siden $y = r\sin\theta$). Tilsvarende er

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial k}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta$$

der vi i siste trinn har brukt at $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$ (siden $x = r\cos\theta$) og at $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$ (siden $y = r\sin\theta$).

b) Temperaturen som en funksjon av tiden er nå gitt ved $T(t) = k(g(t), h(t))$ der $k(r,\theta)$ er funksjonen fra fra punkt a). Kjerneregelen gir da

$$T'(t) = \frac{\partial k}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial \theta}\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial k}{\partial r}g'(t) + \frac{\partial k}{\partial \theta}h'(t)$$

(der den siste omskrivingen skyldes at g og h er funksjoner av bare én variabel). Setter vi inn uttrykkene for $\frac{\partial k}{\partial r}$ og $\frac{\partial k}{\partial \theta}$ fra punkt a), får vi

$$T'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)g'(t) + \left(-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta\right)h'(t)$$