Løsningsforslag for 2. oblig MAT1100, høsten 2008

Oppgave

a) Vi har:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{(1+x)-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x)^2} =$$
$$\frac{(1+2x+x^2)-(1+x^2)}{(1+x^2)(1+x)^2} = \underline{\underline{\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2}}}.$$

Av utrykket for $f'(x)$ ser vi at $f'(x) > 0$ for $x > 0$ og $f'(x) < 0$ når $x < 0$ og $x \neq -1$ (fordi f ikke er definert for $x = -1$).
Derfor avtar f når $x \in (-\infty, -1)$, f avtar også når $x \in (-1, 0]$ og f vokser når $x \in [0, \infty)$.

b) Vi har

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (\arctan x - \frac{1}{\frac{1}{x}+1}) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Så, $y = \frac{\pi}{2} - 1$ er horisontal asymptote når $x \to \infty$.
På samme måte innser vi at
$y = -\frac{\pi}{2} - 1$ er horisontal asymptote når $x \to -\infty$.
Når $x \to -1^+$ vil $1 + x \to 0^+$ og $-\frac{x}{1+x} \to \infty$. Siden $\lim_{x\to-1} \arctan x = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ får vi tilsammen $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty$. Tilsvarende vil $1+x \to 0^-$ når $x \to -1^-$ og derfor $-\frac{x}{1+x} \to -\infty$ når $x \to -1^-$ og vi får følgelig $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$. Dette viser at
$f(x)$ har vertikal asymptote når $x \to -1^+$ og også når $x \to -1^-$.
Siden $f(x) \to \infty$ når $x \to -1^+$ og $f(x) \to -\infty$ når $x \to -1^-$, kan f hverken ha globale maksimums eller minimumspunkter. Siden eneste nullpunkt for $f'(x)$ er $x = 0$ kan f ikke ha andre lokale ekstrempunkter enn dette. Siden f avtar på $(-1, 0]$ og vokser på $[0, \infty)$ er $x = 0$ et lokalt minimumspunkt.
Siden $f(0) = 0$ følger det av dette at f ikke har andre nullpunkter i $(-1, \infty)$. Siden f avtar på $(-\infty, -1)$ og $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4} - 1 < 0$ har f heller ikke nullpunkter i $(-\infty, -1)$ så $x = 0$ er eneste nullpunkt.

c) Arealet er gitt ved $\int_0^1 f(x)dx$. Vi har :

$$\int \arctan x dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

(Her har vi brukt delvis integrasjon og skrevet $\int \arctan x dx = \int v'u dx$ med $v' = 1, v = x$ og $u = \arctan x$.)

Vi har videre $\int \frac{x}{1+x}dx = \int (1 - \frac{1}{x+1})dx = x - \ln|x+1| + C$. Dette gir oss tilsammen at arealet, A er lik:

$$A = [x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - x + \ln|1+x|]_0^1 =$$
$$\underline{\underline{\arctan 1 - \frac{1}{2}\ln 2 - 1 + \ln 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 - 1.}}$$

d) Siden $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$, kan vi bruke L'Hopitals regel. Dette gir:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x\to 0}(\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2})/2x =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^2)(1+x)^2} = 1 = g(0).$$

Dette viser at $g(x)$ er kontinuerlig i $x = 0$.

e) Volumet vi skal finne er gitt ved: $V = \int_0^1 2\pi x \arctan x^2 dx$. Substituerer vi $u = x^2$, $du = 2xdx$, ser vi at integralet blir lik $V = \pi \int_0^1 \arctan u du$. For å beregne dette bruker vi regningen i c). Vi får da

$$V = \pi \int_0^1 \arctan u du = \pi[u \arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2)]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2}\ln 2.}}$$

f)

$$f''(x) = (\frac{2x}{(1+x^2)(1+x)^2})' = \frac{2(1+x^2)(1+x)^2 - 2x(2x(1+x)^2 + (1+x^2)2(1+x))}{(1+x^2)^2(1+x)^4}$$
$$= 2\frac{(1+x^2)(1+x) - x(2x(1+x) + 2(1+x^2))}{(1+x^2)^2(1+x)^3} = 2\frac{1+x+x^2+x^3-2x-2x^2-4x^3}{(1+x^2)^2(1+x)^3}$$
$$\underline{\underline{= -2\frac{3x^3+x^2+x-1}{(1+x^2)^2(1+x)^3}.}}$$

Sett $h(x) = 3x^3 + x^2 + x - 1$. Vi har $h'(x) = 9x^2 + 2x + 1 = 8x^2 + (x+1)^2$. Av dette utrykket ser vi straks at $h'(x) > 0$ for alle x. Dette betyr at $h(x)$ er strengt voksende. Nå er $h(0) = -1 < 0$ og $h(1) = 4 > 0$. Fra skjæringssetningen følger at h har et nullpunkt x_0 mellom 0 og 1, og siden h er strengt voksende vil $h(x) < 0$ for $x < x_0$ og $h(x) > 0$ for $x > x_0$. Siden $(1+x^2)^2 > 0$ for alle x, mens $(1+x)^3 > 0 \Leftrightarrow x > -1$, ser vi (idet vi tar hensyn til faktoren -2) at $f''(x) < 0$ for $x < -1$ og for $x > x_0$ mens $f''(x) > 0$ for $-1 < x < x_0$.

<u>f er altså konkav på $(-\infty, -1)$, konveks på $(-1, x_0]$ og konkav på $[x_0, \infty)$.</u>

Eneste vendepunkt (som altså utifra definisjonen skal være et punkt der f er kontinuerlig og følgelig må ligge i definisjonsområdet til f) blir da x_0. En tegning av grafen til f følger på neste side.

Grafen til f